目 录

第一章　正交变换与仿射变换

本章首先阐明正交变换的概念，然后在欧氏几何的基础上，建立仿射变换的概念，并研究在仿射变换下图形的不变性质，最后介绍几种特殊形式的仿射变换及其性质.

§1　点　变　换

在讨论具体的变换之前，在这一节里，先说明一些一般变换的概念.

1.1　点变换的定义

定义 1.1　设 m 与 m' 是两个集合，如果有一个法则 φ，通过它对于 m 中的任何元素 M，能得到 m' 的一个唯一元素 M'，则 φ 叫做 m 到 m' 中的对应，记为 $\varphi: M\rightarrow M'$，或 $M'=\varphi(M)$.

这时 M' 叫做 M 在对应 φ 之下的象，并且反过来 M 叫做 M' 在对应 φ 之下的原象.

定义 1.2　设有集合 m 到集合 m' 中的对应 φ，如果在 φ 之下，m' 的每个元素 M' 都有原象，即在 m 内必存在某个元素 M，使得 $M'=\varphi(M)$，则对应 φ 叫做 m 到 m' 上的对应.

定义 1.3　设有集合 m 到集合 m' 上的对应 φ，如果在 φ 之下，m 的任何两个不同的元素 M_1 与 M_2 的象也必是不同的，即当 $M_1\neq M_2$ 时，必有 $\varphi(M_1)\neq\varphi(M_2)$，则对应 φ 叫做 m 与 m' 之间的一一对应.

例 1　m: 1, 2, 3, …

m' 2, 4, 6, …

$\varphi: a\rightarrow 2$，其中 a 是 m 的任何元素，φ 是一个集合 m 到集合 m'

中的对应。

例 2　m 与 m' 分别与例 1 同。

φ:　$1\to 2$

$a\to 2a-2$, 其中 $a=2,3,4,\cdots$

φ 是一个集合 m 到集合 m' 上的对应.

例 3　m 与 m' 分别与例 1 同.

φ:　$a\to 2a$, 其中 a 是 m 的任何元素, φ 是一个集合 m 与集合 m' 之间的一一对应.

在以上定义里, 如果集合 m 与集合 m' 等同, 则所定义的对应叫做变换, 即有以下定义.

定义 1.4　一个集合 m 到 m 中(上)的对应叫做 m 中(上)的变换. 一个集合 m 与 m 间的一一对应叫做 m 的一一变换.

以上提出了一般变换的定义. 如果 m 是点集合(当然 m 也可以包含平面内的所有点), 则定义 1.4 里的变换叫做点变换. 以后除特别声明外, 本书中所说的变换皆指点变换.

1.2　变换的乘积

设有(点)集合 S, 它含有元素 $x,y,z,\cdots,x',y',z',\cdots,\varphi$ 是 S 的一一变换: $x'=\varphi(x)$, 以后所说的变换皆指一一变换, 并且将 $x'=\varphi(x)$ 也写作 $x'=x\varphi$, 并简称为变换 φ.

又设有两个变换 φ_1,φ_2, 如果对于 S 中的任何元素 x, 有 $x\varphi_1=x\varphi_2$, 则称 φ_1 与 φ_2 相等, 记为 $\varphi_1=\varphi_2$.

有些变换可以分几步通过其他变换而得到. 这就需要变换乘积的概念.

定义 1.5　设 φ_1,φ_2 是集合 S 的两个变换, 如果对于 S 中的任何元素 x, 先通过 φ_1, 再通过 φ_2 而得到 x', 即 $\bar{x}=x\varphi_1$, $x'=\bar{x}\varphi_2$. 则所得到的 S 的新变换 φ: $x'=x\varphi$ 叫做已知变换 φ_1 与 φ_2 的乘积,

记为

$$\varphi=\varphi_1\varphi_2 \tag{1.1}$$

由定义 1.5 可见，对于 S 里的任何元素 x 有

$$x(\varphi_1\varphi_2)=(x\varphi_1)\varphi_2$$

又我们把 $\varphi\varphi$ 记为 φ^2，把 $\overbrace{\varphi\varphi\cdots\varphi}^{n个}$ 记为 φ^n.

注：设 φ_1 是 S_1 到 S_2 的对应，φ_2 是 S_2 到 S_3 的对应，则与定义 1.5 类似，可以一般地规定 φ_1 与 φ_2 的乘积 $\varphi_1\varphi_2$，它是一个 S_1 到 S_3 的对应.

不难验证，两个变换的乘积与它们的顺序有关，即一般地，$\varphi_1\varphi_2\neq\varphi_2\varphi_1$，这就是说，变换的乘法不满足交换律，但有以下定理.

定理 变换的乘法满足结合律.

证明 设 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 是集合 S 的三个变换，需要证明

$$\varphi_1(\varphi_2\varphi_3)=(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3$$

对于 S 中的任何元素 x，由(1.1)有

$$x[\varphi_1(\varphi_2\varphi_3)]=(x\varphi_1)(\varphi_2\varphi_3)=[(x\varphi_1)\varphi_2]\varphi_3$$

$$x[(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3]=[x(\varphi_1\varphi_2)]\varphi_3=[(x\varphi_1)\varphi_2]\varphi_3$$

所以 $\qquad \varphi_1(\varphi_2\varphi_3)=(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3$

1.3 恒等变换与逆变换

定义 1.6 设有集合 S，则使得 S 的任何元素都不变的变换叫做 S 的恒等变换，恒等变换记为 ε.

由定义 1.6 可见，对于 S 中的任何元素 x 有

$$x\varepsilon=x \tag{1.2}$$

又对于任何变换 φ 有

$$\varphi\varepsilon=\varepsilon\varphi=\varphi \tag{1.3}$$

因为

$$x(\varphi\varepsilon)=(x\varphi)\varepsilon=x\varphi$$

$$x(\varepsilon\varphi)=(x\varepsilon)\varphi=x\varphi$$

所以

$$\varphi\varepsilon=\varepsilon\varphi=\varphi$$

设有集合 S 的一个一一变换 $\varphi: x\to x'$，则 S 的另一个变换 $\varphi^{-1}: x'\to x$，叫做 φ 的逆变换．由这个定义可知，φ 也是 φ^{-1} 的逆变换．

下面的等式成立：

$$\varphi\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\varphi=\varepsilon \tag{1.4}$$

因为由上面的定义可知

$$x(\varphi\varphi^{-1})=(x\varphi)\varphi^{-1}=x'\varphi^{-1}=x=x\varepsilon$$

$$x'(\varphi^{-1}\varphi)=(x'\varphi^{-1})\varphi=x\varphi=x'=x'\varepsilon$$

所以 $\quad\varphi\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\varphi=\varepsilon$

注：也可以取(1.4)式作为逆变换的定义。

习　　题

1．设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 是集合 S 的任何 n 个变换，求证：不论如何乘，只要不改变 φ_i 的次序，$\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n$ 的结果是唯一的．

提示：用数学归纳法．

2．设 φ_1,φ_2 是集合 S 的两个变换，求证：$(\varphi_1\varphi_2)^{-1}=\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1}$．

3．设 φ 是集合 m 与集合 m' 之间的一一对应，x 是 m 的一个元素，问 $x(\varphi\varphi^{-1})=?$，$x(\varphi^{-1}\varphi)=?$．如果 φ 是 m 的变换，这两问题的答案如何？

§2　正 交 变 换

2.1　实例

1．平移变换

在欧氏平面上把每一点P按照已知向量$\overrightarrow{AA'}$的方向移到P'使$\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{AA'}$，如此产生的变换叫做沿向量$\overrightarrow{AA'}$的平移变换，简称平移.

如果$\overrightarrow{AA'}$的坐标为(a,b)，且此平移把$P(x,y)$变成$P'(x',y')$，则有

$$x'=x+a,\quad y'=y+b$$

因此得到以下定理

定理 2.1 把平面上的点$P(x, y)$沿坐标为(a,b)的向量平行地移到点$P'(x',y')$，这样，平移变换的代数表示式为

$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases} \tag{2.1}$$

其中a,b是两个独立参数.

2. 旋转变换

在欧氏平面上把每一点P绕一定点旋转一定角变到另一点P'，如此产生的变换叫做旋转变换，简称旋转. 此定点叫做旋转中心，定角叫做旋转角.

(1) 首先取原点为旋转中心，按照定角θ把点$P(x,y)$旋转到点$P'(x',y')$. 如果点P的极坐标为(r, ϕ)，则点P'的极坐标为

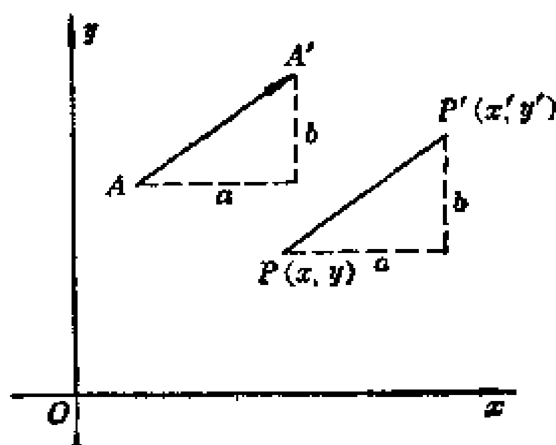


图 2-1

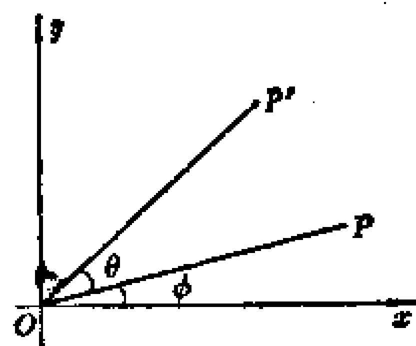


图 2-2

$(r, \phi+\theta)$. 故有

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi$$

$$x' = r\cos(\phi+\theta), y' = r(\sin\phi+\theta)$$

因此

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

(2) 其次，取点(x_0, y_0)为旋转中心，则有

$$x' - x_0 = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta$$

$$y' - y_0 = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta$$

归纳以上(1)、(2)，得到以下定理.

定理 2.2 把平面上点 $P(x, y)$ 绕原点旋转一个定角 θ 变到点 $P'(x', y')$，这样旋转变换的代数表示式为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 θ 是参数.

如果以点(x_0, y_0)为旋转中心，则旋转变换的代数表示式为

$$\begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta \\ y' - y_0 = (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 x_0、y_0、θ 是三个独立参数

3. 轴反射变换

如果变换的每对对应点 A、A' 连结线段都垂直于一条定直线 s 且被 s 平分，则这种变换叫做关于直线 s 的轴反射变换，简称反射，直线 s 叫做反射轴.

不难看出，反射轴 s 上的点都是不动点.

定理 2.3 如果取 x 轴为反射轴，则点 $P(x, y)$变到点 $P'(x', y')$的反射变换的代数表示式为

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \tag{2.4}$$

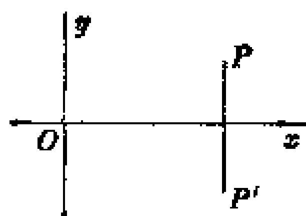


图 2-3

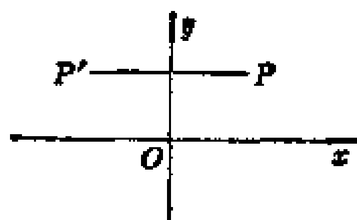


图 2-4

如果取 y 轴为反射轴，则点 $P(x, y)$ 变到点 $P'(x', y')$ 的反射变换的代数表示式为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \tag{2.5}$$

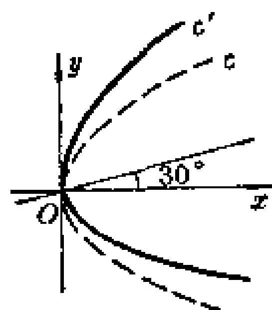


图 2-5

例 1 求顶点在原点，正焦弦长为 2，主轴斜角为 30° 的抛物线 c' 的方程.（图 2-5）

解 顶点在原点，正焦弦长为 2，主轴为 x 轴的抛物线 c 的方程为

$$y^2 = 2x$$

以原点为旋转中心，旋转角为 30° 的旋转变换，由(2.2)知，表示式为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}\,x - y}{2} \\[2ex] y' = \dfrac{x + \sqrt{3}\,y}{2} \end{cases}$$

由此得

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}\,x' + y'}{2} \\[2ex] y = \dfrac{-x' + \sqrt{3}\,y'}{2} \end{cases}$$

将上式代入抛物线 c 的方程 $y^2 = 2x$ 得所求抛物线 c' 的方程

为

$$\left(\frac{-x'+\sqrt{3}y'}{2}\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}\right)=0$$

即
$$x'^2-2\sqrt{3}x'y'+3y'^2-4\sqrt{3}x'-4y'=0$$

2.2 正交变换

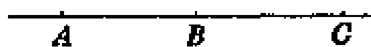
定义 2.1 平面上的变换，如果保持任何两点的距离不变，即当 $A\to A'$, $B\to B'$ 时必然有 $|AB|=|A'B'|$，这样的变换叫做平面上的正交变换.

由前面的定义不难证明，平移、旋转、反射都是正交变换，其中平移或旋转把一个三角形变为定向相同的三角形，而反射把一个三角形变为定向相反的三角形．这是平移或旋转与反射的主要区别.

现在要求正交变换的代数表示式．为此先做以下准备.

引理 正交变换把共线点变为共线点，把不共线点变为不共线点，并且保持两直线间的夹角不变.

证明 设 A, B, C 共线，它们在正交变换 φ 之下的象分别为 A', B', C'(图 2-6).



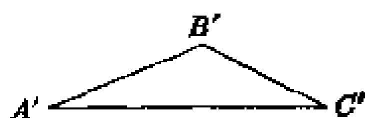


图 2-6

如果后三点不共线，则有

$$|A'C'|<|A'B'|+|B'C'|$$

但是由正交变换的定义有

$$|AB|=|A'B'|,\ |AC|=|A'C'|,\ |BC|=|B'C'|$$

所以，如果

$$|A'C'|<|A'B'|+|B'C'|$$

则必有

$$|AC|<|AB|+|BC|=|AC|$$

这是一个矛盾，说明 A', B', C' 非共线不可。

同理，如果 A, B, C 不共线，则 A', B', C' 也必不共线.

最后，设 φ 把不共线三点 A, O, B 变到不共线三点 A', O', B' (图 2-7)。

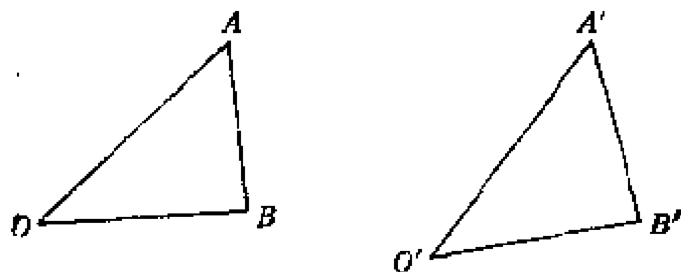


图 2-7

因为

$$|AB| = |A'B'|$$

$$|OA| = |O'A'|$$

$$|OB| = |O'B'|$$

故有

$$\triangle OAB \cong \triangle O'A'B'$$

由此得

$$\angle O = \angle O'$$

可见 φ 保持两直线间的夹角不变.

定理 2.4 在正交变换之下

(1) 线段变为等长线段;

(2) 单位向量变为单位向量;

(3) 笛卡儿直角坐标系变为笛卡儿直角坐标系;

(4) 矩形变为全等的矩形.

根据正交变换的定义与以上引理，容易证明这个定理.

设正交变换把直角坐标系 $O\text{-}e_1e_2$ 变为直角坐标系 $O'\text{-}e_1'e_2'$，点 $P(x, y)$ 变为点 $P'(x', y')$(图 2-8).

如果 e_1' 在原坐标系中的坐标为 (a_{11}, a_{21})，e_2' 在原坐标系中

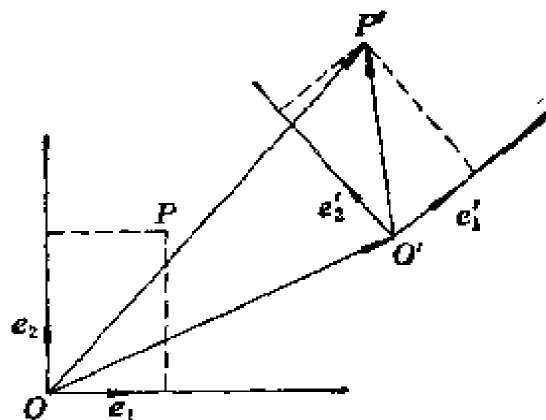


图 2-8

的坐标为(a_{12}, a_{22})，点 O' 在原坐标系中的坐标为(a_{13}, a_{23}).

则由于点 P 在原坐标系中的坐标为(x, y)，点 P' 在原坐标系中的坐标为 (x', y')，根据定理 2.4 可知点 P' 在坐标系 O'-$e_1'e_2'$ 中的坐标也是(x, y).

因为

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P'}$$

故有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'}&=(a_{13}e_1+a_{23}e_2)+(xe_1'+ye_2')\\&=(a_{13}e_1+a_{23}e_2)+x(a_{11}e_1+a_{21}e_2)+y(a_{12}e_1+a_{22}e_2)\\&=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})e_1+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23})e_2\end{aligned}$$

但是

$$\overrightarrow{OP'}=x'e_1+y'e_2$$

比较以上两式，则得

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\\y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\end{cases}\tag{2.6}$$

这就是正交变换的代数表示式.

由于 e_1' 不平行于 e_2'，故有

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}\neq\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

因此

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.7}$$

$\Delta \neq 0$ 说明正交变换是一个一一变换，它的逆变换的表示式可以由(2.6)式解出 x, y 而得到.

又因为 $\boldsymbol{e}_1'$ 与 $\boldsymbol{e}_2'$ 是垂直的单位向量，所以

$$\boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_2' = 0,\ \boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_2' = 1$$

而

$$\boldsymbol{e}_1' = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{e}_2' = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2$$

分别代入上面三个等式即得(2.6)式中的系数必须满足的条件：

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

(2.8)式通常叫做正交条件，它包含了条件(2.7).

平面上的一个点变换，如果它的代数表示式具有形式(2.6)，则此变换叫做线性变换. 正交变换是满足条件(2.8)的线性变换. 反之，有以下定理.

定理 2.5 满足正交条件(2.8)的线性变换(2.6)必是正交变换.

证明 任取两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$. 如果在变换(2.6)之下，P_1, P_2 的象分别为 $P_1'(x_1', y_1')$，$P_2'(x_2', y_2')$.

由(2.6)有

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(2.10)减(2.9)得

$$\begin{pmatrix} x_2'-x_1' \\ y_2'-y_1' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

将(2.11)转置得

$$(x_2'-x_1' \quad y_2'-y_1')=(x_2-x_1 \quad y_2-y_1)A' \tag{2.12}$$

(2.12)乘(2.11)得

$$(x_2'-x_1' \quad y_2'-y_1')\begin{pmatrix} x_2'-x_1' \\ y_2'-y_1' \end{pmatrix}=(x_2-x_1 \quad y_2-y_1)A'A\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$$

由于条件(2.8)与 $A'A=E$(其中 E 为单位方阵)等价，故由上式得

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

所以

$$|P_1'P_2'|=|P_1P_2|$$

因此，满足条件(2.8)的线性变换(2.6)是正交变换.

由定理 2.5，有以下定义.

定义 2.2 (定义 2.1的等价定义)在线性变换

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13} \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23} \end{cases}$$

里，如果系数方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$满足条件 $AA'=E$(*)，则此线性变换叫做正交变换，其中 A' 是 A 的转置方阵，E 是单位方阵.

最后求出正交变换的代数表示式的另一种形式，进一步说明正交变换所包括的成员.

已经知道在(2.6)式里，(a_{11}, a_{21})，(a_{12}, a_{22})分别是 e_1', e_2' 在原

* 可以证明 $AA'=E$ 与 $A'A=E$ 等价.

坐标系中的坐标，又因为 e_1', e_2' 都是单位向量，所以(a_{11}, a_{21})可写为$(\cos\theta, \sin\theta)$，其中 θ 是 e_1 方向到 e_1' 方向的旋转角，(a_{12}, a_{22})可写为$\left(\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)$，此处对于图 2-9-1 的情况取正号，对于图 2-9-2 的情况取负号．所以正交变换的表示式(2.6)可以写为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a_{13} \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + a_{23} \end{cases}$$

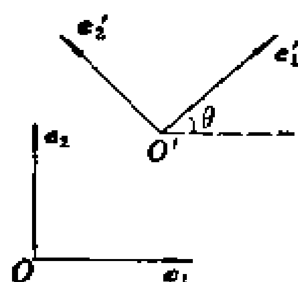


图 2-9-1

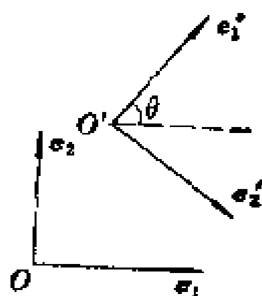


图 2-9-2

或

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta + a_{13} \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta + a_{23} \end{cases}$$

对于第一式$|A| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$，对于第二式$|A|$
$= \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = -1$，将这两个式子合起来可以写为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - \lambda y\sin\theta + a \\ y' = x\sin\theta + \lambda y\cos\theta + b \end{cases} \quad (\lambda = \pm 1) \tag{2.13}$$

其中 a, b, θ 是三个独立参数．

当 $\lambda=1$ 时$|A|=1$，叫做第一种正交变换．

当 $\lambda=-1$ 时$|A|=-1$，叫做第二种正交变换．

定理 2.6 一个第一种正交变换或是一个平移，或是一个旋

转，或是一个旋转与一个平移的乘积.

证明　设在正交变换(2.13)里 $\lambda=1$.

如果 $\theta=0$，则此正交变换是平移(2.1)；

如果 $a=b=0$，则此正交变换是旋转(2.2)；

如果以上两种情况都不成立，则此正交变换是一个以原点为旋转中心，θ 为旋转角的旋转变换与一个沿坐标为(a, b)的向量的平移变换的乘积.

定理 2.7　一个第二种正交变换或是关于一条直线的轴反射变换，或是一个轴反射变换与一个第一种正交变换的乘积.

证明　设在正交变换(2.13)里 $\lambda=-1$.

如果 $\theta=0$，并且 $a=b=0$，则此正交变换是关于 x 轴的反射(2.4)；

如果以上情况不成立，则此正交变换是一个将点 $P(x, y)$变为点 $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$的关于 x 轴的反射与一个将点 $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$变为点 $P'(x', y')$的第一种正交变换的乘积.

由定理 2.6 与定理 2.7 可知，本节开始所举的实例包括了所有的正交变换. 这就是说，除了 2.1 里所讲的平移、旋转与反射外，正交变换再没有什么新内容了. 可以总结如下表

$$\text{正交变换}\ |A|^2=1\begin{cases}|A|=1\cdots\cdots\text{第一种正交变换}^{(*)}\begin{cases}\text{平移}\\ \text{旋转}\end{cases}\\ |A|=-1\cdots\cdots\text{第二种正交变换}\begin{cases}\text{反射}\\ \text{反射与第一种正交变换的乘积}\end{cases}\end{cases}$$

值得注意的是，第一种正交变换不改变坐标系的定向，而第二种正交变换改变坐标系的定向，即将右(左)手系变为左(右)手系. 此外对于正交变换表示式(2.6)有 $|A|^2=1$，但 $|A|^2=1$ 不是(2.6)

* 第一种正交变换也叫做位移变换，第二种正交变换也叫做对称变换.

式成为正交变换的充分条件.

可以考虑多个正交变换的乘积，例如一个第一种正交变换与两个第二种正交变换的乘积，两个第一种正交变换与一个第二种正交变换的乘积，三个反射的乘积等.

2.3 正交变换与坐标变换的关系

在解析几何里也学过平移与旋转，但那里指的是坐标变换(坐标系改变，图形位置不变)。以上所讨论的平移或旋转，指的是点变换(图形位置改变，坐标系不改变)。事实上这二者是一致的，即对于同一公式可以有坐标变换或点变换两种不同的解释. 我们看解析几何里的坐标变换公式

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + a \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + b \end{cases} \tag{2.14}$$

这个公式可以理解为点变换公式，如图 2-10，令坐标系不动，将点 $P(x,y)$沿坐标为$(-a,-b)$的向量作平移，再绕原点旋转角 $-\theta$ 而得到点 P'.

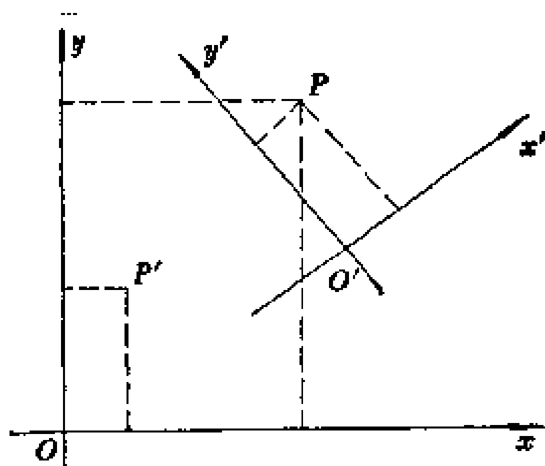


图 2-10

设点 P' 在坐标系 O-xy 里的坐标为(x',y')，由图 2-10 可以看出，点 P 关于坐标系 O'-$x'y'$ 的相对位置与点 P' 关于坐标系

$O\text{-}xy$ 的相对位置完全相同，所以点 P 在坐标系 $O'\text{-}x'y'$ 里的坐标与点 P' 在坐标系 $O\text{-}xy$ 里的坐标相同．这就是说对于同一坐标系 $O\text{-}xy$，点 P 的坐标 (x, y) 与其象点 P' 的坐标 (x', y') 之间的关系仍由(2.14)给出．因此给定一个坐标变换公式，我们可以对它做两种理解：一种是点不动，坐标系变动，(x, y) 与 (x', y') 分别表示同一点在两种坐标系里的坐标；另一种是坐标系不动，(x, y) 与 (x', y') 分别表示一点与其象点在同一坐标系里的坐标．

例 2　说明例 1 的演算过程可以理解为坐标变换．

解　如图 2-11，设抛物线 c' 对于坐标系 $O\text{-}xy$ 的方程为 $y^2=2x$，现将 $O\text{-}xy$ 旋转 $-30°$ 而得坐标系 $O\text{-}x'y'$．这时坐标变换公式与例 1 里的点变换公式相同，仍为

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}\,x'+y'}{2} \\ y=\dfrac{-x'+\sqrt{3}\,y'}{2} \end{cases}$$

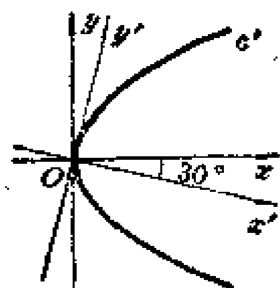


图　2-11

将此公式代入方程 $y^2=2x$ 即得抛物线 c' 对于坐标系 $O\text{-}x'y'$ 的方程与例 1 的结果一致．

习　　题

1. (i) 求把点 $(2, 3)$ 变为点 $(0, -1)$ 的平移变换，再将所得变换用于抛物线 $y^2-x-8y+18=0$.

(ii) 求把点 $(3, 1)$ 变为点 $(-1, 3)$ 的绕原点的旋转变换，再将所得变换用于抛物线 $y^2-x-8y+18=0$.

2. 求中心在原点，半轴长为 3 与 2 并以直线 $x-2y=0$ 为对称轴的椭圆方程．

3. 先用几何法，再用代数法证明：如果一直线绕一点旋转 θ 角，则此直线与新直线所构成的角为 θ．

4. 求证：三角形面积经过正交变换后不变．

5. 求以直线 $ax+by+c=0(a^2+b^2\neq 0)$ 为轴的轴反射变换公式.

6. 求证:

(i) 两个平移的乘积一定是可以交换的.

(ii) 绕原点的两个旋转的乘积一定是可以交换的.

7*. 问是否有某个平移与某个旋转的乘积是可以交换的?

§3 仿射变换

3.1 二平面间的透视仿射对应

设有相交的两个平面 π 与 π', 它们的交线为 l, 通过平面 π 内各点 $A, B, C, \cdots$ 引平行线交 π' 于 $A', B', C', \cdots$(图 3-1), 这样使平面 π 内的点与平面 π' 内的点建立一种一一对应关系. 这种对应叫做 π 到 π' 的透视仿射对应. 显然, 透视仿射对应与所作平行线的方向有关.

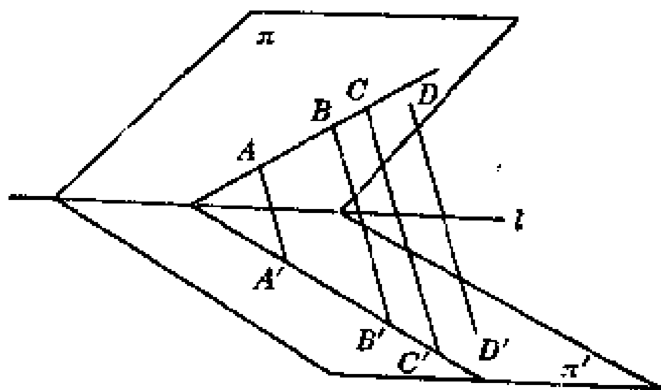


图 3-1

现在我们讨论透视仿射对应的基本性质.

首先不难看出, l 上的每个点都是二重点(自对应点), 并且二重点必在 l 上, 直线 l 叫做对应轴, 简称轴.

其次, 我们看 π 上的一条直线 AB(图 3-1), 这条直线在 π' 上的平行射影是直线 $A'B'$, 直线 AB 与 $A'B'$ 或者交于轴 l 上, 或者它们都与轴 l 平行. 这样, 透视仿射对应也使两平面内的直线建立了一一对应. 透视仿射对应的这个性质叫做保持同素性. 所谓

同素性是指在这同一对应下几何元素保持同一种类而不改变（例如点不能对应直线）的性质．又根据直线的平行射影是它上面所有点的射影的轨迹，所以在一条直线上的每个点总对应着它的对应直线上的一个点．因此平面 π 内的点与直线的结合性也就决定了平面 π' 内对应元素的结合性，即透视仿射对应保持结合性．

最后引进一个重要概念——单比（仿射比）．

定义 3.1 设 P_1，P_2 是有向直线上的两个定点，P 是这有向直线上的另一点，P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 为两个有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{P_2P}$，则其量数的比 $\frac{P_1P}{P_2P}$ 叫做三点 P_1, P_2, P 的单比，记为 (P_1P_2P)．即

$(P_1P_2P)=\frac{P_1P}{P_2P}$．其中 P_1, P_2 叫做基点，P 叫做分点．

不难看出，

当 P 内分 $\overline{P_1P_2}$ 时，$(P_1P_2P)<0$

当 P 外分 $\overline{P_1P_2}$ 时，$(P_1P_2P)>0$

当 P 与 P_1 重合时，$(P_1P_2P)=0$

特别是当 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 中点时，$(P_1P_2P)=-1$．

又如果已知一直线上三点的单比 (P_1P_2P)，另一直线上两点 P_1'，P_2'，则在第二直线上可以唯一地确定一点 P' 而使 $(P_1'P_2'P')=(P_1P_2P)$．

在图 3-1 里，平面 π 内的共线点 A, B, C 对应平面 π' 内的共线点 A', B', C'．由于 AA', BB', CC' 平行，所以有

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$$

亦即

$$(ABC)=(A'B'C')$$

因此得到：在透视仿射对应里，一个平面内共线三点的单比等于另一个平面内三个对应点的单比．

注意：在透视仿射对应的定义里，平面 π 与 π' 是相交的．若 π 与 π' 平行，则我们利用相同的办法也可以建立一种对应，也叫做透视仿射对应．但在这种情况下，不存在二重点与对应轴．请读者自己考虑上面所说的其他性质在这种情况下是否成立．

3.2 仿射对应与仿射变换

在 3.1 里，我们讨论了两个平面间的透视仿射对应，这种对应可以通过平行投影而得到．

设有 $n+1$ 个平面 $\pi, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \pi'$．如果在平面偶$(\pi, \alpha_1), \cdots, (\alpha_i, \alpha_{i+1}), \cdots, (\alpha_{n-1}, \pi')$之间都存在着透视仿射对应，即每两个相邻平面之间都存在着平行投影，这样在平面 π 与 π' 的点之间就建立一种一一对应，这种对应叫做平面 π 到平面 π' 的仿射对应．即有限个透视仿射对应的乘积为一个仿射对应．图 3-2 表示经过四次平行投影而得到的平面 π 到 π' 的仿射对应．

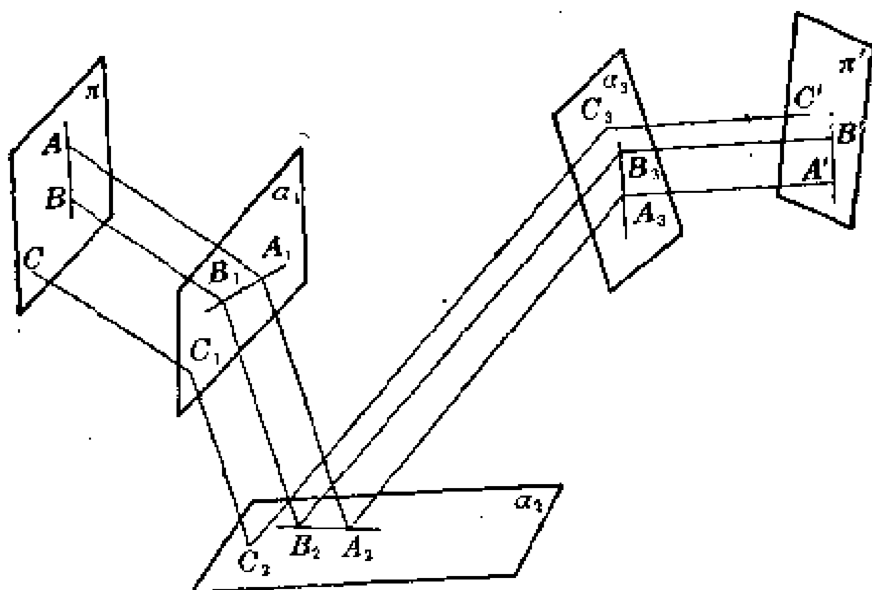


图 3-2

仿射对应仍保持同素性、结合性以及单比不变．至于对应点的连线并不见得平行，也就是说这种对应不一定能由一次平行投影而得到(关于特殊情况见习题 2)．另外，不难验证仿射对应的

下列性质:

(i) 平面 π 到 π' 的透视仿射对应必是仿射对应;

(ii) 一对平行直线,在仿射对应下,对应一对平行直线(仿射对应保持平行性).

定义 3.2 如果平面 π 与平面 π' 重合,则 π 到 π' 的仿射对应叫做平面 π 到自身的仿射变换(平面 π 上的仿射变换).

3.3 仿射坐标系

设已知平面 π 内的一个笛卡儿斜角坐标系 $O\text{-}xy$(图 3-3-1).E 为单位点,坐标为(1,1),则 π 内任何点 P 的坐标 (x, y) 可以表示为

$$x=\frac{OP_x}{OE_x},\quad y=\frac{OP_y}{OE_y}$$

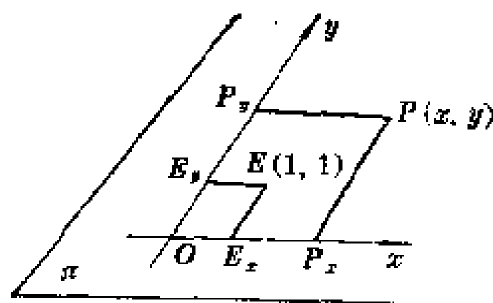


图 3-3-1

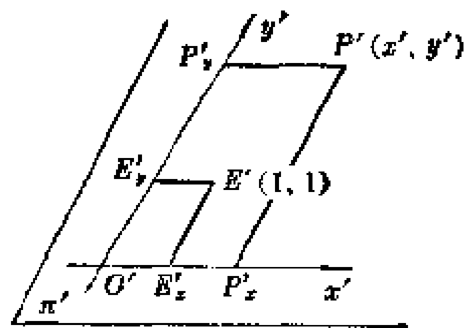


图 3-3-2

此处点 E_x 与 E_y 分别是点 E 在 x 轴与 y 轴上平行于 y 轴与 x 轴的射影,分别叫做 x 轴与 y 轴的单位点. P_x, P_y 分别是点 P 在 x 轴与 y 轴上平行于 y 轴与 x 轴的射影.

现在考虑坐标系 $O\text{-}xy$ 在另一平面 π' 内的仿射对应图形(图 3-3-2). 设 Ox, Oy, E, P 的象分别为 $O'x', O'y', E', P'$,于是平行四边形 OE_xEE_y, OP_xPP_y 的象就分别为平行四边形 $O'E'_xE'E'_y$, $O'P'_xP'P'_y$.

在新坐标系 O'-$x'y'$ 里把点 E' 当作单位点，也就是用线段 $\overline{O'E'_x}$，$\overline{O'E'_y}$ 作为轴 $O'x'$，$O'y'$ 的测量单位. 对于这个坐标系，点 P' 的坐标(x', y')可以表示为

$$x' = \frac{O'P'_x}{O'E'_x}, \qquad y' = \frac{O'P'_y}{O'E'_y}$$

由于仿射对应保持单比不变，所以有

$$x' = x, \qquad y' = y$$

定义 3.3 上面所得到的笛氏坐标系在仿射对应之下的象叫做仿射坐标系，(x', y')叫做点 P'的仿射坐标，记以 $P'(x', y')$.

如果 $P'(x', y')$，则 $\overrightarrow{O'P'} = x'\overrightarrow{O'E'_x} + y'\overrightarrow{O'E'_y}$.

仿射坐标系是笛氏坐标系的推广；因为坐标轴上的测量单位 $\overline{O'E'_x}$ 与 $\overline{O'E'_y}$ 一般来说是不相等的. 笛氏坐标系就是仿射坐标系当坐标轴上的测量单位相等时的特殊情况.

一个仿射坐标系，如果再经过一次仿射对应，所得到的象还是仿射坐标系.

定理 3.1 设共线三点 $P_i (i=1, 2, 3)$，它们的仿射坐标为 (x_i, y_i)，则单比

$$(P_1P_2P_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} \tag{3.1}$$

证明 如图 3-4，

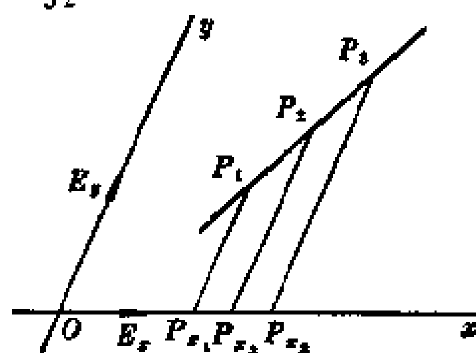


图 3-4

$$(P_1P_2P_3) = \frac{P_1P_3}{P_2P_3} = \frac{P_{x_1}P_{x_3}}{P_{x_2}P_{x_3}} = \frac{OP_{x_3} - OP_{x_1}}{OP_{x_3} - OP_{x_2}} = \frac{\dfrac{OP_{x_3}}{OE_x} - \dfrac{OP_{x_1}}{OE_x}}{\dfrac{OP_{x_3}}{OE_x} - \dfrac{OP_{x_2}}{OE_x}} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$$

同理

$$(P_1P_2P_3)=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$$

可以证明，在仿射坐标系之下，直线方程是一次方程；反之，一次方程是直线方程．还可以推出三点共线的充要条件以及三直线共点的充要条件等．这都请读者自己思考．

3.4 仿射变换的代数表示式

设在平面内给定仿射坐标系 $O\text{-}e_1e_2$，如果有一个仿射变换把 $O\text{-}e_1e_2$ 变为坐标系 $O'\text{-}e_1'e_2'$，把点 $P(x,y)$ 变为点 $P'(x',y')$，其中 (x,y)，(x',y') 都是对于 $O\text{-}e_1e_2$ 的坐标．

现在要求出 (x,y) 与 (x',y') 的关系．与正交变换的情况类似，假定向量 e_1'，e_2' 在坐标系 $O\text{-}e_1e_2$ 中的坐标分别为 (a_{11},a_{21})，(a_{12},a_{22})，点 O' 在坐标系 $O\text{-}e_1e_2$ 中的坐标为 (a_{13},a_{23})．

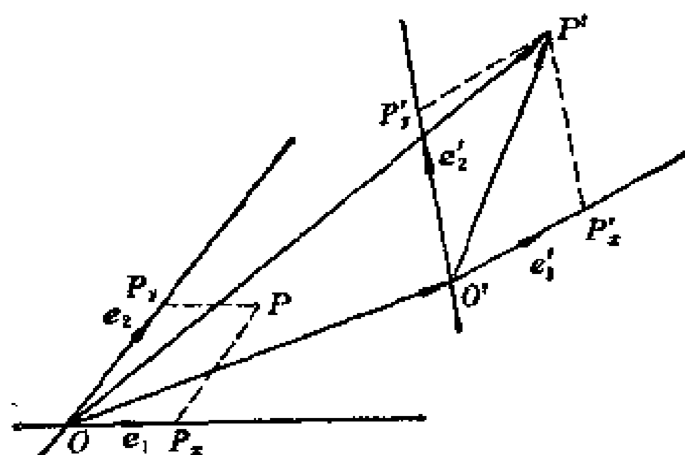


图 3-5

如图 3-5，由于仿射变换保持平行性不变，所以 $O'P_x'P'P_y'$ 为平行四边形（P_x'，P_y' 分别为 P_x，P_y 的象）．又由于仿射变换保持单比不变，所以点 P' 在坐标系 $O'\text{-}e_1'e_2'$ 中的坐标为 (x,y)．

因为

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P'}$$

所以

$$\overrightarrow{OP'}=(a_{13}\boldsymbol{e}_1+a_{23}\boldsymbol{e}_2)+(x\boldsymbol{e}'_1+y\boldsymbol{e}'_2)$$

$$=(a_{13}\boldsymbol{e}_1+a_{23}\boldsymbol{e}_2)+x(a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2)+y(a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2)$$

但是 $$\overrightarrow{OP'}=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2$$

比较以上两个等式得

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\\y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\end{cases}\tag{3.2}$$

这就是仿射变换的代数表示式.

由于 $\boldsymbol{e}'_1$ 不平行于 $\boldsymbol{e}'_2$，所以(3.2)式满足条件

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$$

至此我们得到以下定理.

定理 3.2 平面上的仿射变换可以用仿射坐标（或笛氏坐标）表示为(3.2)式的形式，其中

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$$

根据定理 3.2 的推导，我们看到向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 的象 $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ 与点 O 的象 O' 完全确定了一个仿射变换，因此有以下推论.

推论 不共线的三对对应点决定唯一一个仿射变换.

注意：(3.2)式的逆式——用点 P' 的坐标 x', y' 表示出点 P 的坐标 x, y 的表示式，可以写成以下形式：

$$\begin{cases}x=\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1\\y=\alpha_2x'+\beta_2y'+\gamma_2\end{cases}\tag{3.3}$$

其中

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\\alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\neq 0$$

例 1 试确定仿射变换，使 y 轴，x 轴的象分别为直线 $x+y$

$+1=0$, $x-y-1=0$, 且点$(1,1)$的象为原点.

解 设(3.3)为所求变换的逆式, 则 $x=0$ 变成直线

$$\alpha_1 x'+\beta_1 y'+\gamma_1=0$$

但由题设 $x=0$ 变成 $x'+y'+1=0$, 可知 $\alpha_1 x'+\beta_1 y'+\gamma_1=0$ 与 $x'+y'+1=0$ 表示同一直线.

所以有

$$\frac{\alpha_1}{1}=\frac{\beta_1}{1}=\frac{\gamma_1}{1}=\frac{1}{h}$$

因此

$$hx=x'+y'+1$$

同理

$$ky=x'-y'-1$$

此处 h、k 是参数.

又因为点$(1,1)$的象为原点, 得 $h=1$, $k=-1$. 所以所求变换的逆式是

$$\begin{cases} x=x'+y'+1 \\ y=-(x'-y'-1) \end{cases}$$

由此可得出所求仿射变换是

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2} \\ y'=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}-1 \end{cases}$$

仿射变换代数表示式的导出, 利用了它的几何性质, 例如仿射变换保持单比不变等. 现在反过来可以通过仿射变换的代数表示式证明其几何性质.

首先我们知道(3.2)或(3.3)所决定的变换使共线点变成共线点.

其次可以证明它们保持共线三点的单比不变.

设 $P_i(x_i, y_i)(i=1,2,3)$是一条直线上的三点，它们的象 $P'_i(x'_i, y'_i)(i=1,2,3)$是另一直线上的三点。

由(3.1)有

$$(P_1P_2P_3)=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=\lambda$$

再根据(3.2)得

$$\begin{aligned}(P'_1P'_2P'_3)&=\frac{x'_3-x'_1}{x'_3-x'_2}\\&=\frac{(a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13})-(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13})}{(a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13})-(a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13})}\\&=\frac{a_{11}(x_3-x_1)+a_{12}(y_3-y_1)}{a_{11}(x_3-x_2)+a_{12}(y_3-y_2)}\\&=\lambda\end{aligned}$$

所以

$$(P'_1P'_2P'_3)=(P_1P_2P_3)$$

因此得出结论:(3.2)或(3.3)所表示的变换具有同素性、结合性，并且保持任何共线三点的单比不变.

根据这个结论以及前面的讨论，我们可以给出仿射变换如下的另一个定义。

定义 3.4 平面内的点之间的一个一一变换，如果满足以下条件:

(i) 任何共线点的象仍是共线点;

(ii) 任何共线三点的单比不变,

则此一一变换叫做平面内的仿射变换.

最后指出，对于平面 π 到平面 π' 的仿射对应，公式(3.2)或(3.3)仍适用. 不过在这种情况下，(x, y)是 π 内点 P 的坐标，而 (x', y')是点 P 在 π' 内的象点 P' 的坐标。

3.5 图形的仿射性质

我们已经知道，在仿射对应(变换)下，图形的一些性质如同素性、结合性以及单比都是不变的. 我们将图形经过仿射对应(变换)不变的性质(量)叫做图形的仿射性质(仿射不变量). 下面再利用仿射变换的代数表示式推证一些仿射性质与仿射不变量，首先是3.2中曾经提及的平行性.

定理 3.3 两条平行直线经过仿射变换后仍变为两条平行直线.

证明 设在笛氏坐标系下，已知二平行直线 l_1, l_2:

$$l_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0 \tag{3.4}$$

$$l_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{3.5}$$

其中
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}.$$

经过仿射变换(3.3)后，(3.4)与(3.5)分别变为:

$$(a_1\alpha_1+b_1\alpha_2)x'+(a_1\beta_1+b_1\beta_2)y'+a_1\gamma_1+b_1\gamma_2+c_1=0 \tag{3.7}$$

$$(a_2\alpha_1+b_2\alpha_2)x'+(a_2\beta_1+b_2\beta_2)y'+a_2\gamma_1+b_1\gamma_2+c_2=0 \tag{3.8}$$

令 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$, 则 $\dfrac{c_1}{c_2}\neq k$. 于是

$$\frac{a_1\alpha_1+b_1\alpha_2}{a_2\alpha_1+b_2\alpha_2}=k,\quad \frac{a_1\beta_1+b_1\beta_2}{a_2\beta_2+b_2\beta_2}=k,\quad \frac{a_1\gamma_1+b_1\gamma_2}{a_2\gamma_1+b_2\gamma_2}=k$$

但是

$$\frac{a_1\gamma_1+b_1\gamma_2+c_1}{a_2\gamma_1+b_2\gamma_2+c_2}\neq k$$

(因为否则将有

$$a_1\gamma_1+b_1\gamma_2+c_1=k(a_2\gamma_1+b_2\gamma_2+c_2)$$

因此 $c_1=kc_2$.)

至此证明了(3.7)，(3.8)所表示的两直线平行.

推论 1 两条相交直线经仿射变换后仍变成两条相交直线.

推论 2 共点的直线经仿射变换后仍变为共点的直线.

定理 3.4 两平行线段之比是仿射不变量.

证明 设在笛氏直角坐标系下，已知四点 $P_i(x_i, y_i)(i=1,2,3,4)$ 且 $P_1P_2 /\!/ P_3P_4$. 经过仿射变换(3.2)后 $P_i(x_i, y_i)$ 变为 $P_i'(x_i', y_i')$.

则由定理 3.3 知 $P_1'P_2' /\!/ P_3'P_4'$. 所以

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=k$$

$$\frac{y_2'-y_1'}{x_2'-x_1'}=\frac{y_4'-y_3'}{x_4'-x_3'}=k'$$

由(3.2)得

$$\begin{cases}x_i'=a_{11}x_i+a_{12}y_i+a_{13}\\ y_i'=a_{21}x_i+a_{22}y_i+a_{23}\end{cases}\qquad (i=1,2,3,4)$$

因此有

$$\frac{|P_1'P_2'|}{|P_3'P_4'|}=\frac{\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2}}{\sqrt{(x_4'-x_3')^2+(y_4'-y_3')^2}}=\frac{|x_2'-x_1'|\sqrt{1+k'^2}}{|x_4'-x_3'|\sqrt{1+k'^2}}$$

$$=\frac{|x_2'-x_1'|}{|x_4'-x_3'|}=\frac{|a_{11}(x_2-x_1)+a_{12}(y_2-y_1)|}{|a_{11}(x_4-x_3)+a_{12}(y_4-y_3)|}$$

$$=\frac{|(a_{11}+a_{12}k)(x_2-x_1)|}{|(a_{11}+a_{12}k)(x_4-x_3)|}=\frac{|x_2-x_1|}{|x_4-x_3|}$$

又

$$\frac{|P_1P_2|}{|P_3P_4|}=\frac{|x_2-x_1|}{|x_4-x_3|}$$

所以

$$\frac{|P_1P_2|}{|P_3P_4|}=\frac{|P_1'P_2'|}{|P_3'P_4'|}$$

推论 一直线上两线段之比是仿射不变量.

定理3.5 两个三角形面积之比是仿射不变量.

证明 设在笛氏直角坐标系下，已知不共线三点 $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,3)$.

则 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积 $S_{\triangle P_1P_2P_3}$ 为

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

经过仿射变换(3.2)后 P_i 变为 $P_i'(x_i', y_i')(i=1,2,3)$,

则

$$\begin{cases} x_i'=a_{11}x_i+a_{12}y_i+a_{13} \\ y_i'=a_{21}x_i+a_{22}y_i+a_{23} \end{cases} \qquad (i=1,2,3)$$

$\triangle P_1'P_2'P_3'$ 的面积为

$$S'_{\triangle P_1'P_2'P_3'}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13} & a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13} & a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13} \\ a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23} & a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23} & a_{21}x_3+a_{22}y_3+a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

的绝对值

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|S_{\triangle P_1P_2P_3}$$

所以
$$\frac{S'_{\triangle P_1'P_2'P_3'}}{S_{\triangle P_1P_2P_3}}=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|$$

同理，另一个三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 与其象三角形 $Q_1'Q_2'Q_3'$ 面积之比

$$\frac{S'_{\triangle Q'_1 Q'_2 Q'_3}}{S_{\triangle Q_1 Q_2 Q_3}} = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$$

所以

$$\frac{S_{\triangle P_1 P_2 P_3}}{S_{\triangle Q_1 Q_2 Q_3}} = \frac{S'_{\triangle P'_1 P'_2 P'_3}}{S'_{\triangle Q'_1 Q'_2 Q'_3}}$$

即两个三角形面积之比是仿射不变量.

推论 1 两个平行四边形面积之比为仿射不变量.

推论 2 两个封闭图形面积之比是仿射不变量.

例 2 正方形的哪些性质是仿射的?

解 正方形的对边平行、对角线互相平分、对边相等是仿射性质.

例 3 求圆的仿射对应图形.

解 设有以原点为中心、r 为半径的一个圆, 它的参数方程为

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

则由(3.2)知此圆的象的参数方程为

$$x' - a_{13} = r(a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta)$$
$$y' - a_{23} = r(a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta)$$

解出 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 得

$$\cos\theta = \frac{1}{r(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}[a_{22}(x' - a_{13}) - a_{12}(y' - a_{23})]$$

$$\sin\theta = \frac{1}{r(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}[a_{11}(y' - a_{23}) - a_{21}(x' - a_{13})]$$

将以上二式平方相加得圆的象的方程为

$$(x'_1 - a_{13})^2(a_{21}^2 + a_{22}^2) - 2(x' - a_{13})(y' - a_{23})(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})$$
$$+ (y' - a_{23})^2(a_{11}^2 + a_{12}^2)$$
$$= r^2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2$$

可以证明这是一个椭圆的方程, 因此得知圆的仿射对应图形是椭

圆.

由于圆的仿射对应图形是椭圆，所以可以从圆的性质推导出椭圆的一些性质，如图 3-6-1．如果已知三角形 ABC 的顶点与其内切圆的切点的连线共点，则因为圆的仿射对应图形是椭圆，三角形的仿射对应图形还是三角形，且由于仿射对应保持结合性不变，所以圆的切线的仿射对应图形是椭圆的切线，因此图 3-6-1 的仿射对应图形是图 3-6-2.

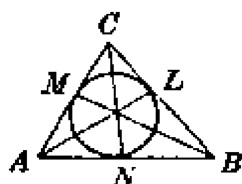


图 3-6-1

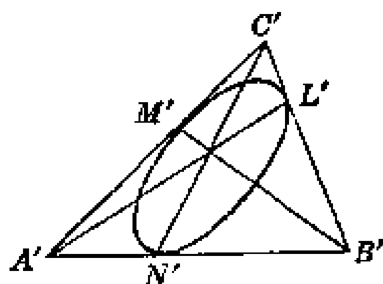


图 3-6-2

如果在图 3-6-1 里，AL, BM，CN 共点，则在图 3-6-2 里，$A'L', B'M'$，$C'N'$ 也共点，即三角形 $A'B'C'$ 的顶点与其内切椭圆的切点的连线共点.

例 4　求椭圆的面积.

解　设在笛氏直角坐标系下，有椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

如果经过仿射变换

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=\dfrac{a}{b}\,y \end{cases}$$

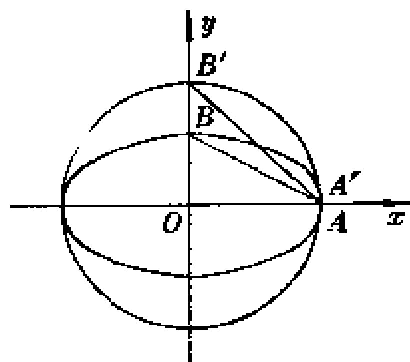


图 3-7

椭圆的对应图形为圆

$$x^2+y^2=a^2$$

如图 3-7，椭圆内的三角形 OAB：$O(0,0)$，$A(a,0)$，$B(0,b)$．经过以上的仿射变换，$\triangle OAB$ 的对应图形为 $\triangle OA'B'$，其中 $A'\equiv A$，$B'(0,a)$.

根据定理 3.5 推论 2，有

$$\frac{\text{椭圆面积}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{\text{圆面积}}{S_{\triangle OA'B'}}$$

所以

$$\frac{\text{椭圆面积}}{\frac{1}{2}ab}=\frac{\pi a^2}{\frac{1}{2}a^2}$$

因此所给椭圆面积为 πab.

3.6 仿射变换的特例

在本节的最后说明仿射变换的几种特例：

(1) 正交变换

(2) 位似变换

定义 3.5 在平面上取定一点 S，规定 S 的象即 S 自己，平面上其他点 P 与其象点 P' 满足以下条件：

(i) 点 P' 在直线 SP 上；

(ii) 单比 $(P'PS)=k$ （k 为常数 $\neq 0,1$），则这种变换叫做位似变换（简称位似），常数 k 叫做位似比，定点 S 叫做位似中心。

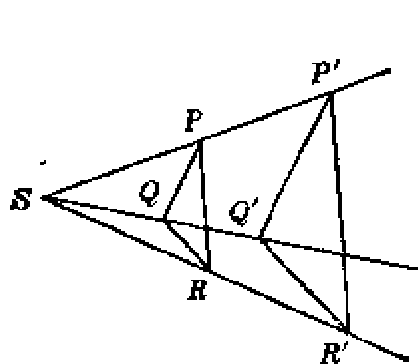


图 3-8-1

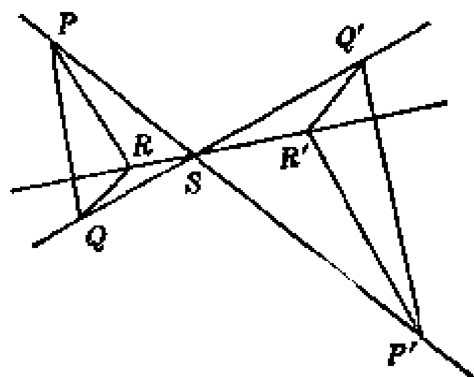


图 3-8-2

不难证明位似变换满足定义 3.2 的要求，所以位似变换是仿射变换. 另外，在位似变换下，除位似中心外，其他任何两点的连线与它们对应点的连线平行. 在图 3-8-1 与 3-8-2 分别表示位似

比 $k>0$ 与 $k<0$ 的情况，其中 S 为位似中心，$P,P';Q,Q';R,R'$ 为三对对应点.

下面求位似变换的代数表示式.

取笛氏直角坐标系的原点为位似中心，设点 $P(x,y)$ 在位似变换下变成点 $P'(x',y')$，则

$$\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \tag{3.9}$$

其中 k 为位似比.

更一般地，考虑变换

$$\begin{cases} x'=kx+c_1 \\ y'=ky+c_2 \end{cases} \quad (k\neq 0) \tag{3.10}$$

不难证明(3.10)所表示的变换或者是一个以原点为位似中心的位似变换与一个平移的乘积，或者是二者之中的一个（当 $k=1$ 时为平移，当 $c_1=c_2=0$ 时为位似变换）.

(3) 相似变换

定义 3.6 平面上的变换，如果任何两点 P，Q 与其象点 P'，Q' 满足以下条件：

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|}=k \qquad (k\text{ 为常数})$$

则这种变换叫做相似变换(简称相似)，k 叫做相似比.

显然，相似变换是正交变换的推广（$k=1$ 时即为正交变换）. 正交变换保持图形的大小与形状都不变，而相似变换只保持图形的形状不变，但不一定保持大小不变.

可以证明相似变换的以下性质：

(i) 共线点变为共线点；

(ii) 共线三点的单比保持不变；

(iii) 两直线所构成的角度不变.

证明 我们只证明(i)，其余(ii)，(iii)留给读者思考。

设 A,B,C 为共线三点且 B 在 A,C 之间，因为

$$\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|B'C'|}{|BC|}=\frac{|A'C'|}{|AC|}$$

故必

$$\frac{|A'B'|+|B'C'|}{|AB|+|BC|}=\frac{|A'C'|}{|AC|}$$

所以

$$\frac{|A'B'|+|B'C'|}{|A'C'|}=\frac{|AB|+|BC|}{|AC|}$$

但由于 B 在 A,C 之间，$|AB|+|BC|=|AC|$，所以

$$|A'B'|+|B'C'|=|A'C'|$$

由此可知 A',B',C' 三点共线，并且 B' 在 A',C' 之间.

由于(i)，(ii)，根据定义 3.2 知相似变换是仿射变换.

由于相似变换是把一个图形变为与它相似的图形的变换，它把每一个图形放大(或者缩小) k 倍(k 为相似比). 因此当两个图形相似时(如图 3-9 里的$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$)，我们可以把其中一个图形移动到与另一个图形成为位似的位置(如将$\triangle ABC$ 移动到$\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$). 这就是说，相似变换可以表示为一个正交变换与一个位似变换的乘积. 所以在笛氏直角坐标系之下，相似变换的代数表示式为

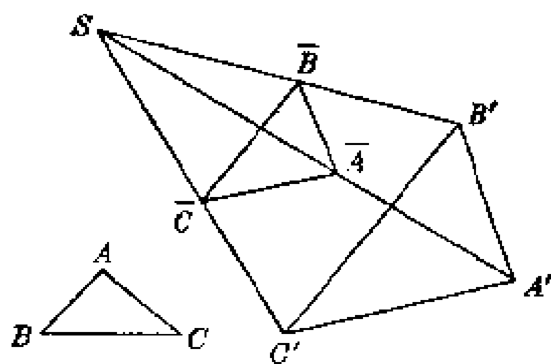


图 3-9

$$\begin{cases}x'=r(x\cos\theta-\lambda y\sin\theta)+c_1\\ y'=r(x\sin\theta+\lambda y\cos\theta)+c_2\end{cases}\quad (r>0)\qquad (3.11)$$

其中 r,θ,c_1,c_2 为四个独立参数.

当 $\lambda=1$ 时，叫做同向相似变换；

当 $\lambda=-1$ 时，叫做异向相似变换.

不难看出同向相似变换是第一种正交变换与位似变换的乘积，异向相似变换是第二种正交变换与位似变换的乘积.

注意：同向相似变换与异向相似变换也可以分别写为

$$\begin{cases} x'=a_1x-b_1y+c_1 \\ y'=b_1x+a_1y+c_2 \end{cases} \tag{3.12}$$

其中
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}=a_1^2+b_1^2>0$$

与
$$\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1 \\ y'=b_1x-a_1y+c_2 \end{cases} \tag{3.13}$$

其中
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{vmatrix}=-(a_1^2+b_1^2)<0$$

仿射变换的特殊情况，当然不止以上几种，其他情况就不再介绍了.

习　题

1. 已知两基点 A, B, 求作分点 P 使 (ABP) 分别等于 $-2, -1, 0, 1, 2$. 问哪些是不可能的？

2. 在仿射对应的定义里，如果

(i) $\pi \parallel \alpha_1 \parallel \cdots \parallel \alpha_{n-1} \parallel \pi'$

或 (ii) $\pi, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \pi'$ 共线

求证：π 到 π' 的仿射对应是透视仿射对应.

3. 求使三点 $(0, 0), (1, 1), (1, -1)$ 变到三点 $(2, 3), (2, 5), (3, -7)$ 的仿射变换.

4. 求使直线 $x=0, y=0, x+2y-1=0$ 分别变为直线 $x+y=0, x-y=0, x+2y-1=0$ 的仿射变换.

5. 求仿射变换使两直线 $a_1x+b_1y+c_1=0, a_2x+b_2y+c_2=0$（其中 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$）分别变为 y 轴，x 轴，且使不在两直线上的一点 (x_0, y_0) 变为 (1,

1).

6. 求仿射变换使直线 $x+2y-1=0$ 上的每个点都不变，且使点(1, −1)变为(−1, 2).

7. 求仿射变换

$$\begin{cases} x'=7x-y+1 \\ y'=4x+2y+4 \end{cases}$$

的不变直线.

8. 求证：在仿射变换下，两个不变点的连线上的任何点都不变.

9. 问在仿射变换下，菱形有哪些性质保持不变？

10. 下列图形的仿射对应图形各是什么？(i) 平行四边形；(ii) 梯形；(iii) 等腰三角形；(iv) 两个全等的矩形；(v) 三角形的内心.

11. 在椭圆的内接三角形的顶点作切线构成外切三角形. 求证：如果这两个三角形有两对边平行，则第三对边也平行.

第二章　射 影 平 面

本章在欧氏几何的基础上用增加无穷远元素的方法来建立射影平面，然后在射影平面内引进齐次点坐标与齐次线坐标并介绍射影几何里的一个重要概念——对偶原则．最后把实射影平面扩充成复射影平面．

§4　中心射影与无穷远元素

4.1　中心射影

直线向直线的中心投影：设 l 与 l' 是同一平面内两条不同的直线，O 是在此平面内但不在 l 与 l' 上的一点．

设 P 是 l 上任一点，若 OP 与 l' 相交，则交点 P' 叫做点 P 从 O 投射到 l' 上的中心射影．OP 叫做投射线，O 叫做投影中心（射心）．显然 P 也是 P' 在 l 上的中心射影，又不难知道中心射影与投影中心的位置有关．

如果 l 与 l' 相交，那末在中心投影下存在一个二重点（自对应点），即 l 与 l' 的交点．

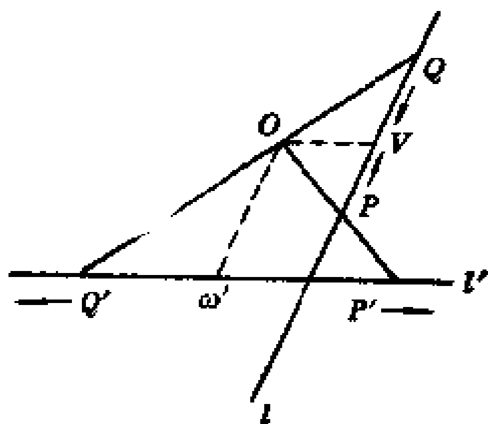


图　4-1

平面向平面的中心投影：设 π 与 π' 是空间里两个不同的平面，O 是空间里不在此两平面上的一点．

设 P 是平面 π 内任一点，P 和 O 的连线 OP 交平面 π' 于点 P'，点 P' 叫做 P 在 π' 内的中心射影，OP 叫做投射线，O 叫做投影中

心(射心)。

正如两直线间的中心投影一样，如果投影中心取得不同，则平面 π 内的点在 π' 内有不同的中心射影.

不难看出，在中心投影下，平面 π 内的直线对应 π'内的一条直线. 当 π 与 π' 相交时，存在着一条二重直线(自对应直线)，这就是平面 π 与 π' 的交线. 在这条直线上，每一点也都是二重点(自对应点).

在图 4-1 里，如果 l 上的一点 V 与 O 的连线 OV 与 l'平行，则点 V' 不存在，即点 V 无中心射影，同样在 l' 上有一点 W' 不存在 l 上的中心射影，因此中心射影的对应并不是 l 上的点与 l' 上的点之间的一一对应. 我们把点 V 叫做直线 l 上的影消点，点 W'叫做直线 l' 上的影消点.

同样在图 4-2 里，若平面 π 上一点 V 与 O 的连线 OV 平行于

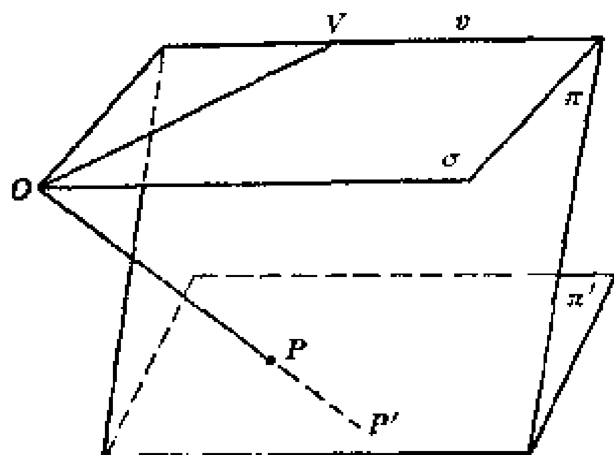


图 4-2

平面 π'，则点 V 的中心射影不存在，V 叫做 π 上的影消点. 通过 O 与平面 π' 平行的平面 σ 与 π 的交线若为 v，则直线 v 的中心射影也不存在，直线 v 叫做 π 上的影消线，影消点的轨迹是影消线. 类似地，可以定义平面 π' 上的影消点与影消线.

4.2 无穷远元素

现在我们引进一种新的元素——无穷远元素，以保证中心投影具有一般性；正如在推广数的概念的过程中引进负数和零一样，从而保证了减法运算具有更大的一般性.

无穷远点 在图 4-1 里，我们曾看到直线 l 上的点与直线 l' 上的点之间经中心投影不能建立一一对应. 产生这个事实的原因就在于两条平行直线没有交点. 为了建立一一对应，可以设想在每条直线上引进一个新点，并且与两相交直线只有一个交点这一结论没有矛盾. 于是我们规定：

约定一 在平面内对于任何一组平行直线引入唯一一点叫做无穷远点与之对应，此点在组中每一直线上而不在组外的任何直线上. 无穷远点可记以 P_∞，为了区别起见，平面内原有的点则叫做有穷远点.

根据这一约定，可以证明空间里任何一组平行直线也有且只有唯一公共点仍叫做无穷远点. 事实上，给定空间一组平行直线，取定其中一条直线，则它上面有唯一无穷远点，再取组中另一直线，则此直线与定直线必共面，所以它们只有唯一公共点，即上面所说的无穷远点. 同理可证此点在组中每一直线上.

还可以证明，一直线与它的平行平面相交于一个无穷远点（习题 1）.

无穷远直线 一平面内的直线的方向既有无穷多，因此平面内的无穷远点也应有无穷多. 平面内所有的无穷远点的轨迹应该是什么呢？由于每条直线上只有一个无穷远点，所以这个轨迹应该与平面内的每条直线交于唯一点. 如果采用平面内无穷远点的轨迹是一直线的说法即可满足这个要求. 于是我们规定：

约定二 一平面内所有无穷远点的（点）集合是一条直线，叫

做无穷远直线．无穷远直线可记以 l_∞，为了区别起见，平面内原有的直线叫做有穷远直线．

根据这一约定，可以证明一组平行平面相交于一条无穷远直线．事实上，给定一组平行平面，在组中一个平面内的无穷远直线上任取一个无穷远点，取在此平面内对应于此无穷远点的一条直线，过此直线作一平面与组中其他平面相交于一组平行直线．于是上述的无穷远点将在每个平面内．由于所取无穷远点的任意性，所以给定的一组平行平面相交于一条无穷远直线．

无穷远平面 空间里既有无穷多个方向，所以有无穷多个无穷远点．由于这些无穷远点的轨迹与每个平面相交于一条无穷远直线，所以我们采用空间里无穷远点的轨迹是平面的说法．于是我们规定：

约定三 空间里所有无穷远点的(点)集合是一个平面，叫做无穷远平面．无穷远平面可记以 π_∞．为了区别起见，空间里原有的平面叫做有穷远平面．

无穷远点、无穷远直线、无穷远平面统称为无穷远元素，作为平面几何里的无穷远元素为无穷远点与无穷远直线．

4.3 一维与二维射影空间的概念与模型

在欧氏直线上添加了一个无穷远点以后便得到了一条新的直线，我们把它叫做仿射直线．如果将仿射直线上的有穷远点与无穷远点同等看待而不加区分，则这条仿射直线就叫做射影直线(一维射影空间)．反过来，如果在一条射影直线上任取一个特定点叫做无穷远点，而将其余的点叫做有穷远点，这样的射影直线就是仿射直线．如果在仿射直线上再去掉这个无穷远点，就成为通常的欧氏直线了．如图 4-3，在欧氏直线上添加了一个无穷远点 P_∞ 后，就得到一条仿射直线，它可以看作是欧氏平面上仿射直线的模型．

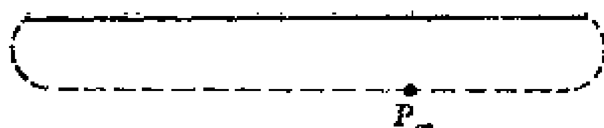


图 4-3

如果将点 P_∞ 与其他点（有穷远点）不加区分，则得射影直线. 射影直线可以看作是封闭的. 因此欧氏平面上的圆常用作为射影直线的模型.

同样地，把以上概念加以推广可得射影平面的概念. 在欧氏平面上添加一条无穷远直线即得到仿射平面. 如果在仿射平面上，对于有穷远元素与无穷远元素同等看待而不加区分即得到射影平面(二维射影空间). 反过来，如果在射影平面内取定一条直线作为无穷远直线，而将其余的直线作为有穷远直线，这样就得到仿射平面. 如果在仿射平面内再去掉这条无穷远直线，就成为通常的欧氏平面了.

现在我们给出一个欧氏空间里的仿射平面的模型.

设有以 O 为球心的球面，过 O 作平面交球面于大圆 c，如图 4-4，我们规定：

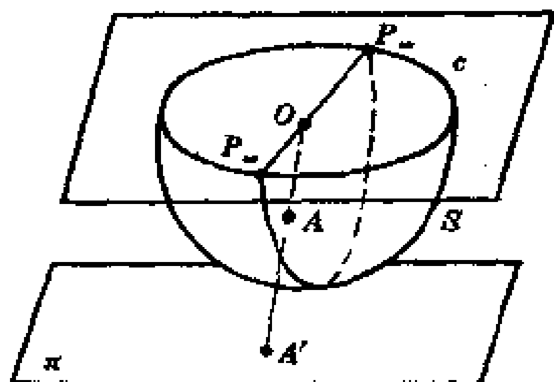


图 4-4

半球面 S 为仿射平面，大圆 c 上的点为无穷远点，过 O 的每一直径在 c 上的两个端点当作一个无穷远点，S 上的其他点为有穷远点.

根据以上规定，大圆 c 就是无穷远直线 l_∞，有穷远直线是半

个大圆弧，但它与 c 的两个交点当作一个点，即为该直线上的无穷远点.

这样，我们得到了欧氏空间里仿射平面的模型.

如果平面 π 切半球面 S 于南极，A 为 S 上的任何点，OA 交 π 于 A'.

令 φ: $A\to A'$.

则 φ 是 S 的点与 π 的点之间的一一对应. 并且 φ 使得大圆 c (S 上的无穷远直线)对应 π 上的无穷远直线.

思考: 在 S 上如何得到一组平行直线?

在以上的模型里，如果对于有穷远元素与无穷远元素同等看待而不加区分，则所得到的就是欧氏空间中射影平面的模型.

射影直线与欧氏直线很不相同. 例如在射影直线上两点并不能决定唯一一个线段，其上三点也难以说明哪一点介于另两点之间. 同样，射影平面也与欧氏平面很不相同，例如射影平面上一直线并不能把该平面分成两部分，射影平面上两直线也不是把该平面分成四部分等. 还应注意在射影平面内任何两直线都相交.

4.4 图形的射影性质

在引进无穷远元素后，将一直线上的影消点与另一直线上的无穷远点建立点的对应. 如图 4-1，直线 l 上的点 V 对应直线 l' 上的无穷远点，l 上的无穷远点对应 l' 上的点 W'，这样就建立了直线 l 的点与直线 l' 的点之间的一一对应. 这种通过中心投影所建立的两直线点之间的一一对应叫做二直线之间的透视对应. 同样，在引入无穷远元素后，也可以通过中心投影建立两平面的点之间的一一对应，叫做二平面之间的透视对应，它使一平面上的影消线对应另一平面上的无穷远直线. 如图 4-2，平面 π 上的直线 v 对应平面 π' 上的无穷远直线.

思考：二平面间的透视对应与二平面间的透视仿射对应的关系如何？

我们将图形经过中心投影后不变的性质(量)叫做图形的射影性质(射影不变量).

不难看出，同素性、结合性都是射影性质，又如二次曲线经过中心投影的象还是二次曲线，所以二次曲线这一概念可以说是射影概念. 应该注意，如果图形的性质经过某些中心投影后不变，而不是在任何中心投影下都不变，这种性质并不是图形的射影性质. 例如一个圆的中心投影的象可能是圆，但不能保证圆的任何中心投影的象都一定是圆. 因此曲线为圆这一性质不是射影性质. 由于我们可以将二相交直线投影成二平行直线(习题 2 (i))，所以二直线的平行性也不是射影性质. 另外，重要的仿射不变量单比也不是射影不变量，对此可由以下例题说明：

如图 4-5，设 c 是以 O 为顶点的角$\angle(a, b)$的平分线，以直线 l 与 l' 分别截三直线 a, b, c，交点分别为 A, B, C 与 A', B', C' 使得

$$|AO|<|BO|,\ |A'O|>|B'O|$$

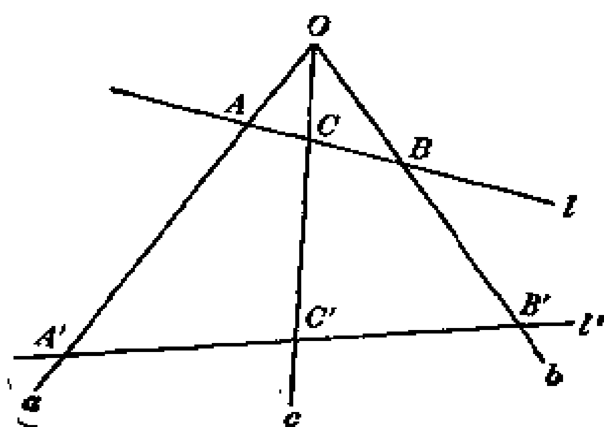


图 4-5

于是

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}=\frac{AO}{BO}$$

$$(A'B'C')=\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{A'O}{B'O}$$

所以 $$|(ABC)|<1,\ |(A'B'C')|>1$$

因此说明了单比不是射影不变量.

下面引入两个重要的射影概念.

定义4.1 一直线上所有点的集合叫做点列,此直线叫做点列的底. 以 l 为底, $A, B, C, \cdots$为元素的点列记为 $l(A, B, C, \cdots)$.

定义 4.2 一平面内通过一点的所有直线的集合叫做线束,此点叫做线束的中心(或顶点). 以 O 为中心, $a, b, c, \cdots$为元素的线束记为 $O(a, b, c, \cdots)$.

点列与线束的元素分别为点与直线, 显然点列与线束都是射影概念, 点列与线束经中心投影后的象还分别为点列与线束.

4.5 利用投影到无穷远证明几何题

给定平面 π 与其上任何直线 l,则可以选取平面 π' 与投影中心V 使得 l 对应 π' 上的无穷远直线,亦即 l 为 π 内的影消线. 这一过程可以叫做"将直线 l 投影到无穷远". 利用这种方法, 可以证明某些几何问题.

例 如图 4-6-1, 设三直线 P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2交于一点 S, P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2 分别交两直线 Ox_1, Ox_2 于 P_1, Q_1, R_1 与 P_2, Q_2, R_2.

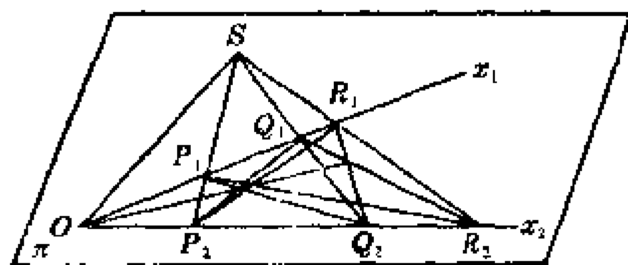


图 4-6-1

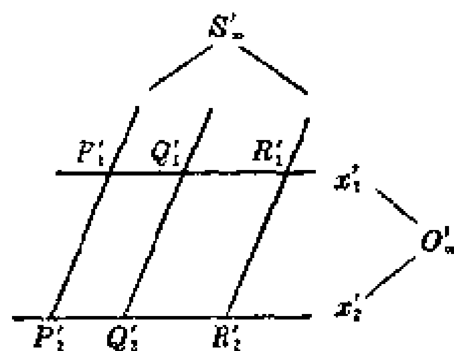


图 4-6-2

求证 直线 P_1Q_2 与 P_2Q_1 的交点，Q_1R_2 与 Q_2R_1 的交点，R_1P_2 与 R_2P_1 的交点在一直线上，且所在的直线通过 O.

证明 将直线 OS 投影到无穷远，这只需在直线 Ox_1, Ox_2 所定的平面 π 外任取一点 V，取平面 π' 平行于 V 与 OS 所定的平面，则以 V 为投影中心建立的 π 向 π' 的中心投影将 OS 投影成 π' 的无穷远直线 $O'_\infty S'_\infty$(图 4-6-2).

设 x'_1, x'_2, P'_1, Q'_1, R'_1, P'_2, Q'_2, R'_2 分别为 x_1, x_2, P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2 在此中心投影下的象.

在图 4-6-2 里，显然直线 $P'_1Q'_2$ 与 $P'_2Q'_1$ 的交点，$Q'_1R'_2$ 与 $Q'_2R'_1$ 的交点，$R'_1P'_2$ 与 $R'_2P'_1$ 的交点在一直线上，且所在的直线平行于 P'_1, Q'_1, R'_1 所在的直线或 P'_2, Q'_2, R'_2 所在的直线.

由于中心投影保持结合性不变，所以在图 4-6-1 里有直线 P_1Q_2 与 P_2Q_1 的交点，Q_1R_2 与 Q_2R_1 的交点，R_1P_2 与 R_2P_1 的交点在一直线上且点 O 也在这三点所在的直线上.

习　题

1. 求证：一直线与它的平行平面相交于一个无穷远点.

2. (i) 求证：相交于影消线上的二直线投影成二平行直线.

(ii) 求证：任意四边形可以投影成平行四边形.

3. 在一平面的影消线上取定两点 P, Q. R 为该平面内任何点，求证：$\angle PRQ$ 投影后等于常量.

4. 如果将平面 π 上一定直线 p 以 O 为投影中心投影到平面 π' 上得直线 p'. 求证：当点 O 变动时，p' 通过一定点.

5. 设 OX, OY, OZ 为三定直线. A, B 为二定点，其连线通过点 O、点 R 为 OZ 上的动点，且直线 RA, RB 分别交 OX, OY 于点 P, Q. 求证：PQ 通过 AB 上一定点.

6. 设 A, B 为二定点，XY 为定直线. 于 XY 上任取两点 P, Q. 又 AP 与 BQ 交于 L, AQ 与 BP 交于 M. 求证：LM 通过 AB 上一定点.

§5 笛沙格(Desargues)透视定理

在本节里证明射影平面上一个重要定理——关于三点形的笛沙格定理.

定义 5.1 平面内不共线的三点与其每两点的连线所组成的图形叫做三点形，平面内不共点的三直线与其每两直线的交点所组成的图形叫做三线形.

由定义 5.1 可见三点形或三线形都含有不共线的三个点以及这三点两两相连的三条直线，前者叫做顶点，后者叫做边. 它们实际上是同一种图形.

三点 A, B, C 所组成的三点形记以 ABC，两个三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 之间可以指定相互的对应顶点，通过对应顶点的边叫做对应边. 例如在三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 里指定 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 为对应顶点，这时 AB 与 $A'B'$，BC 与 $B'C'$，CA 与 $C'A'$ 就是对应边. 关于三点形有下面的著名定理.

定理(笛沙格) 如果两个三点形对应顶点的连线交于一点，则对应边的交点在一直线上.

证明 设有三点形 ABC 与 $A'B'C'$，对应顶点连线 AA'、BB'，CC' 交于一点 O. 对应边 BC 与 $B'C'$ 的交点为 X，CA 与 $C'A'$ 的交点为 Y，AB 与 $A'B'$ 的交点为 Z. 要证 X, Y, Z 在一直线上.

情况(i). ABC 与 $A'B'C'$ 位于不同的平面 π 与 π' 内(图 5-1).

因 BC, $B'C'$ 都在五点 O, B, B', C, C' 所定的平面内，所以二直线 BC，$B'C'$ 相交. 交点既在 π 内也在 π' 内. 因此点 X 存在且在 π 与 π' 的交线上.

同理，CA 与 $C'A'$，AB 与 $A'B'$ 也都相交且交点在 π 与 π' 的交线上.

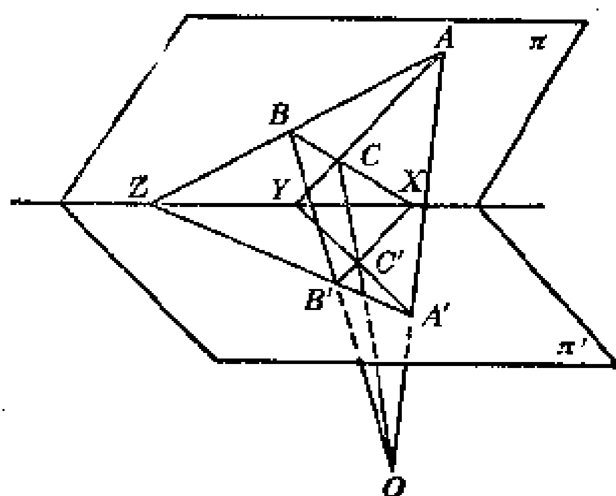


图 5-1

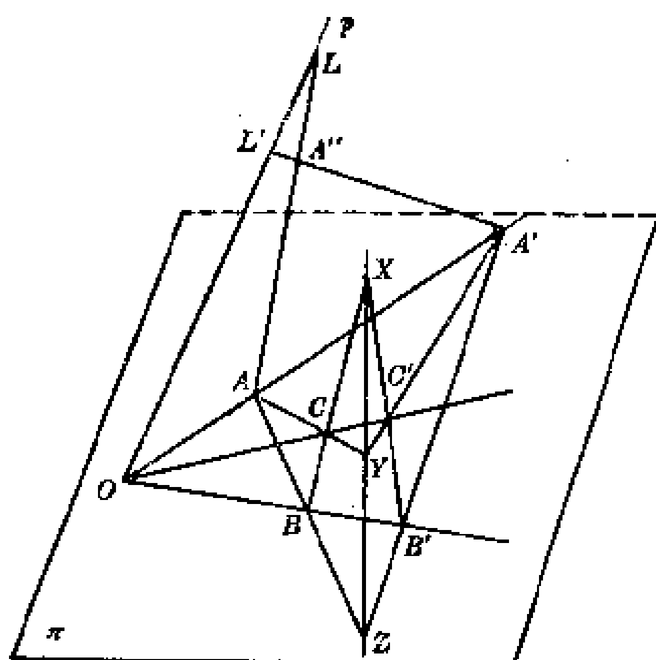


图 5-2

因此三点 X, Y, Z 在一直线上.

情况(ii). ABC 与$A'B'C'$位于同一平面 π 内(图 5-2).

通过 O 作不在 π 内的直线 p, 在 p 上任意取两点 L, L'.

由于直线 AL, $A'L'$位于直线 p 与 OAA'所决定的平面内, 所以直线 AL 与 $A'L'$ 相交, 交点记以 A''.

同理, 直线 BL 与$B'L'$ 相交, 交点记以 B''. 直线 CL 与 $C'L'$

相交，交点记以 C''.

三点 A'', B'', C'' 所决定的平面与 π 不同（例如 A''不在 π 内）.

考虑三点形 LBC 与 $L'B'C'$，二者不在同一平面内. 由于LL', BB', CC' 交于同一点 O，所以根据情况 (i) 知 BC与 $B'C'$，CL 与 $C'L'$, BL 与 $B'L'$ 交于同一直线上的点，即 X, C''，B''，在一直线上. 因此X在平面 $A''B''C''$内. 但X也在平面 π 内，这说明X在两不同平面 π 与 $A''B''C''$的交线上.

同理，Y, Z 也在平面 π 与 $A''B''C''$的交线上.

所以三点 X, Y, Z 在一直线上.

笛沙格定理的逆命题也成立，即有以下定理.

定理 如果两个三点形对应边的交点在一直线上，则对应顶点的连线交于一点.

这个定理的证明留给读者思考.

定义 5.2 如果两个三点形对应边的交点共线，则所在直线叫做它们的透视轴；如果两个三点形对应顶点的连线共点，则公共交点叫做它们的透视中心。

笛沙格定理与逆定理说明：两个三点形如果有透视中心，则必有透视轴；反过来，如果有透视轴，则必有透视中心. 如果笛沙格定理成立，这两个三点形就叫做透视的.

注：笛沙格定理是射影几何的重要定理，许多定理以它为根据. 就两个三点形在同一平面的情况而言，在进行证明时，我们利用了空间作图. 因此很自然地会问：笛沙格定理能不借助于空间图形来证明吗？回答是否定的. 因此只就平面射影几何而言，笛沙格定理必须选作公理.

例 1 直线 AB 与 CD 交于 U，直线 AC 与 BD 交于 V，直线 UV 分别交 AD, BC 于 F, G，直线 BF 与 AC 交于 L(图 5-3).

求证 三直线 LG, CF, AU 交于一点.

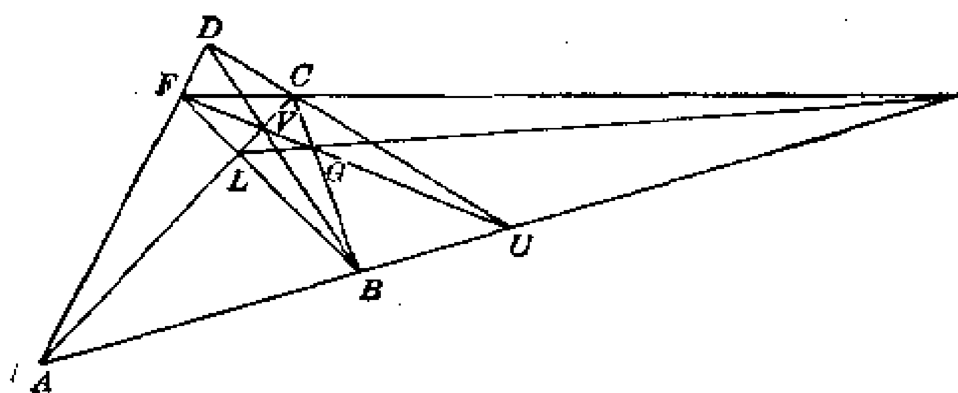


图 5-3

证明 考虑三点形 AFL 与 UCG.

对应边 FL 与 CG, AL 与 UG, AF 与 UC 分别交于点 B, V, D.

由于 B, V, D 三点共线，所以根据笛沙格定理的逆定理知三直线 AU, FC, LG 共点.

例 2 设三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 为透视的，BC' 与 $B'C$，CA' 与 $C'A$，AB' 与 $A'B$ 分别交于点 L, M, N（图 5-4）.

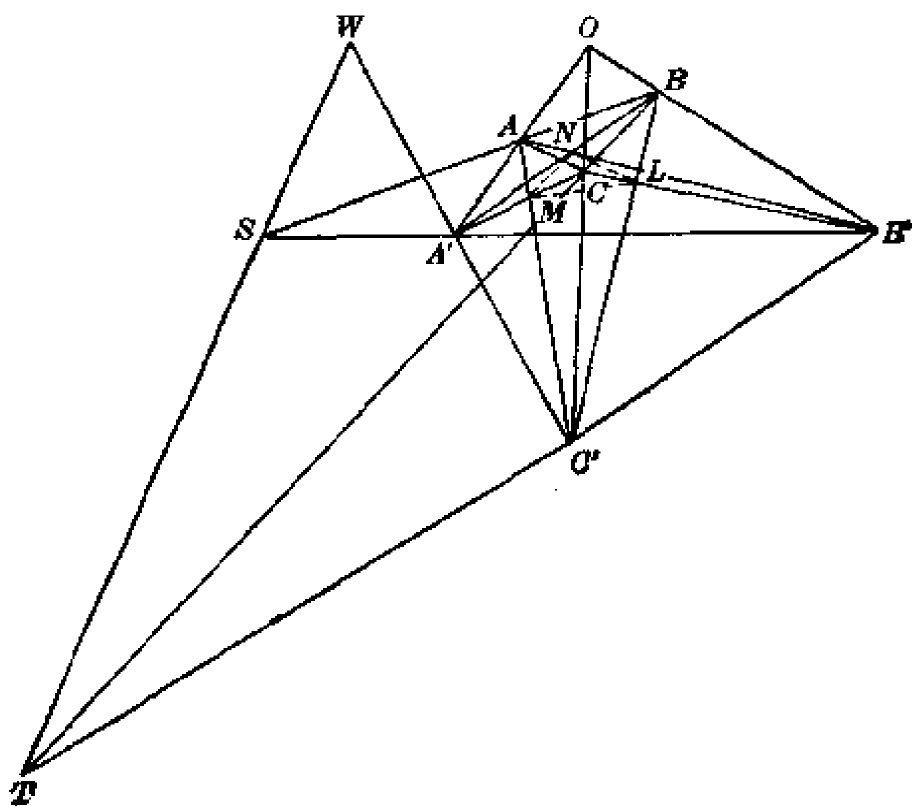


图 5-4

求证(i) $BC, B'C', MN$ 共点.

(ii) 三点形LMN 与 $ABC, A'B'C'$ 都透视.

证明 设三点形 ABC 与$A'B'C'$ 的透视中心为O.

考虑三点形 BCA' 与$B'C'A$. 令 BC 与$B'C'$ 的交点为T, 由于 $BB', CC', A'A$ 交于一点 O, 所以根据笛沙格定理知, BC 与 $B'C'$的交点 T, CA' 与$C'A$ 的交点 M, BA' 与 $B'A$ 的交点N三点共线. 因此$BC, B'C', MN$ 交于一点 T.

同理, $CA, C'A', NL$ 交于一点 W. AB, $A'B'$, ML 交于一点 S. 但是 S, T, W 三点共线(因为三点形ABC 与 $A'B'C'$ 透视), 所以三点形 LMN 与 $ABC, A'B'C'$ 都透视. (i), (ii)皆得证.

习 题

1. 在欧氏平面内, $\triangle ABC$ 的高线为 AD, BE, CF. 另外, BC 与 EF 交于 X, CA 与 FD 交于 Y, AB 与 DE 交于 Z. 求证: 三点 X, Y, Z 共线.

2. 设 a, b, c, d 为平面内四条直线, 不许先作 a, b 的交点与 c, d 的交点, 求作一直线通过这两个交点.

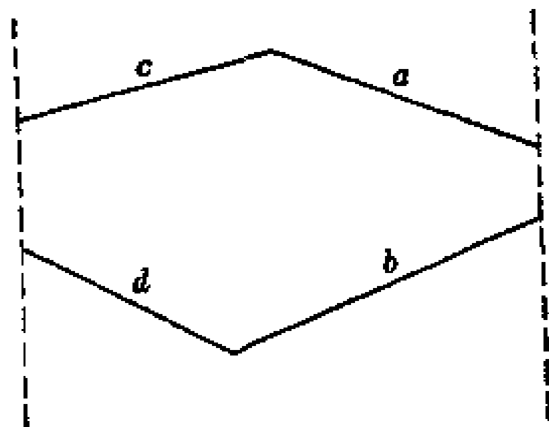


图 5-5

3. 设 $ABCD$ 是一个四面体, 点X在 BC 上, 一直线通过X分别交 AB, AC 于 P、Q. 另一直线通过X分别交 DB, DC 于 R, S. 求证: PR 与 QS 的交点在 AD 上.

4. 设三个共面的三点形是两两成透视的且有公共的透视中心. 求证:

三透视轴交于一点.

5. 设有两直线 l 与 l' 以及三个共线点 S, A, A'. 过 S 作直线分别交 l, l' 于 X, X'. 又 XA 与 $X'A'$ 交于点 P. 求证:点 P 的轨迹为过 l, l' 交点的一直线.

6. 设有三点形 ABC. 在三边 BC, CA, AB 上分别取点 A', B', C'. $B'C'$ 与 BC 交于 F, $C'A'$ 与 CA 交于 G, $A'B'$ 与 AB 交于 H. 又 FH 与 BB' 交于 M, FG 与 CC' 交于 N. 求证:三直线 MG, NH, BC 交于一点.

7. 设 A, B, C 是不共线点, P 是过 C 的一条定直线上的动点. AP 与 BC 交于 X, AC 与 BP 交于 Y. 求证: XY 通过一个定点.

§6 齐次点坐标

6.1 齐次点坐标

当欧氏直线规定了方向、原点与单位线段以后,即建立了笛氏坐标系. 它使有穷远点与实数之间建立了一一对应, 从而确立了欧氏直线上点的坐标的概念. 当引入无穷远点后, 无穷远点没有坐标. 为了刻划无穷远点,我们引入齐次点坐标.

一维齐次点坐标

定义 6.1 设欧氏直线上有穷远点 P 的笛氏坐标为 x, 则满足 $\frac{x_1}{x_2}=x$ 的二数 x_1, x_2(其中 $x_2\neq 0$) 叫做点 P 的齐次(笛氏)坐标, 记以 $P(x_1, x_2)$. 而当 $x_2=0$ 时,即 $(x_1, 0)$(其中 $x_1\neq 0$)或 $(1, 0)$ 规定为直线上的无穷远点的齐次(笛氏)坐标.

由定义 6.1 可见:

(i) 不同时等于零的任何两个数 x_1, x_2 在轴上确定唯一一个点 $P(x_1, x_2)$; $(0, 0)$ 不能决定一个点;

(ii) 如果 $\rho\neq 0$, 则 $(\rho x_1, \rho x_2)$ 与 (x_1, x_2) 决定同一点;

(iii) 如果 $x_2\neq 0$, 则 $P(x_1, x_2)$ 为轴上一个有穷远点, 它的笛氏

坐标为 $x=\frac{x_1}{x_2}$;

(iv) 如果 $x_2=0, x_1\neq 0$, 则$P(x_1, 0)$或 $P(1,0)$ 为轴上的无穷远点.

要特别注意,对于轴上任何点(有穷远或无穷远)它的齐次坐标有无穷多组. 又如果 $P(x_1, x_2)(x_2\neq 0)$,则 $x=\frac{x_1}{x_2}$叫做点P的非齐次坐标,无穷远点没有非齐次坐标.

二维齐次点坐标

在欧氏平面内建立二维笛氏坐标(直交或斜交), 则可使平面内的有穷远点与有序实数偶之间建立一一对应, 从而确立了平面内点的坐标的概念. 为了刻划无穷远点, 我们引入二维齐次点坐标.

定义 6.2 设欧氏平面内点P的笛氏坐标为 (x, y). 则满足 $\frac{x_1}{x_3}=x, \frac{x_2}{x_3}=y$ 的三数 x_1, x_2, x_3(其中 $x_3\neq 0$)叫做点P的齐次(笛氏)坐标,记以 $P(x_1, x_2, x_3)$.

由定义 6.2 可见,平面内一点的齐次坐标有无穷多组; $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$(其中 $\rho\neq 0$)和(x_1, x_2, x_3)为同一点的齐次坐标. 为了区别起见,(x, y)叫做点P的非齐次坐标.

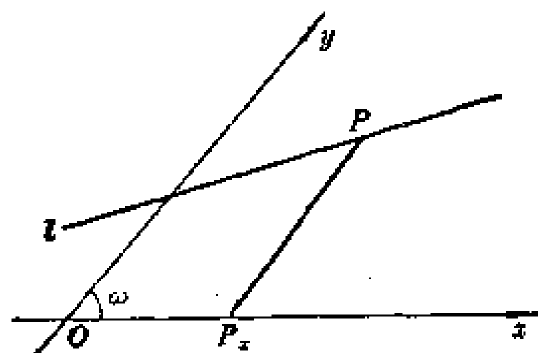


图 6-1

现在说明，$(x_1, x_2, 0)$可以作为无穷远点的齐次坐标。

设有直线

$$y=\lambda x+b \tag{6.1}$$

当二坐标轴直交时，$\lambda=\mathrm{tg}\theta$ 即为直线的斜率（其中 θ 为斜角）。

当二坐标轴斜交时，$\lambda=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\omega-\theta)}$其中 θ 为斜角，ω 为二坐标轴的交角。

如果在(6.1)里 b 变动，而 λ 不变也就是 θ 不变，则(6.1)表示一组平行直线。

现在取(6.1)里一定直线 l，即 λ, b 均为定值. l 上一点 P 的非齐次坐标为$(x, \lambda x+b)$. 其齐次坐标为 $(x, \lambda x+b, 1)$ 或$\left(1, \lambda+\dfrac{b}{x}, \dfrac{1}{x}\right)$. 当 P 从 l 上两个方向趋于无穷远时，即当$x\longrightarrow+\infty$ 或 $x\longrightarrow-\infty$ 时得点 P 的齐次坐标的极限为$(1, \lambda, 0)$，这是与 b 无关的一组数. 因此可以规定以 λ 决定的方向的无穷远点的无数组齐次坐标为$(\rho, \rho\lambda, 0)$（其中 $\rho\neq0$）. 即有以下定义.

定义 6.3 任何三个有序实数 $(x_1, x_2, 0)$（其中 $x_1\neq0$），$\dfrac{x_2}{x_1}=\lambda$，规定为以 λ（二坐标轴直交时为斜率）决定的方向的无穷远点的齐次坐标；$(0, x_2, 0)$（其中 $x_2\neq0$）或$(0, 1, 0)$规定为 y 轴方向的无穷远点的齐次坐标.

注意：在(x_1, x_2, x_3)中，如果 $x_1=x_2=x_3=0$，则 λ 不定，故没有以$(0, 0, 0)$为坐标的点.

6.2 直线的齐次坐标方程

定义 6.4 在齐次点坐标中，设有一直线和一个以(x_1, x_2, x_3)为流动点的齐次坐标所构成的方程，如果此方程能够且仅能够被

该直线上的点的齐次坐标所满足，则此方程叫做该直线的齐次点坐标方程，简称齐次方程．这时也称该直线为此方程所决定的直线．

不难证明以下定理．

定理 6.1 设一直线的非齐次方程为

$$a_1x+a_2y+a_3=0 \qquad (a_1^2+a_2^2\neq 0)$$

则此直线的齐次方程为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \qquad (a_1^2+a_2^2\neq 0) \tag{6.2}$$

并且反过来也成立．

由于(6.2)不含常数项，所以它是齐次的．

另外，过原点的直线的齐次方程为

$$a_1x_1+a_2x_2=0 \qquad (a_1^2+a_2^2\neq 0) \tag{6.3}$$

定理 6.2 无穷远直线的齐次方程为

$$x_3=0 \tag{6.4}$$

注意：无穷远直线无非齐次方程．

6.3 齐次点坐标的应用

为了简便起见，以后常把一点$(x_1,\ x_2,\ x_3)$叫做点x，记以$x\equiv(x_1,x_2,x_3)$．把一直线$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$叫做直线$\alpha=0$，记以$\alpha\equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$．

定理 6.3 两点a,b重合的充要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

的秩为1．

证明 两点(a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3)重合的充要条件是

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

即
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$
的秩为1.

类似地有

定理 6.3′ 两直线 $\alpha=0$, $\beta=0$ 重合的充要条件是矩阵
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$
的秩为1.

定理 6.4 两个不同点 a, b 的连线的齐次方程是
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0 \tag{6.5}$$
(简记为$|xab|=0$).

证明 设 $$r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3=0$$
为所求的直线方程.

因为直线通过两点(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), 所以
$$r_1a_1+r_2a_2+r_3a_3=0$$
$$r_1b_1+r_2b_2+r_3b_3=0$$
由上面三个式子消去 r_1, r_2, r_3 即得(6.5)式.

类似地有

定理 6.4′ 两条不同直线 $\alpha=0$, $\beta=0$ 的交点的齐次坐标是
$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

定理 6.5 三个不同点 a, b, c 共线的充要条件是
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

或

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

的秩为 2.

证明 由定理 6.4 知通过 a, b 两点的直线的齐次方程是

$$|xab| = 0$$

因为点 c 在上式所决定的直线上，而此情况的充要条件是

$$|cab| = 0$$

即

$$|abc| = 0$$

因三点不同，所以其坐标所构成的方阵的秩为 2.

定理 6.5′ 三条不同直线 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$ 共点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

或

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

的秩为 2.

证明 三直线 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$ 共点的充要条件是方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解. 所以此方程组除 $x_1=0, x_2=0, x_3=0$ 外还有其他解，而此情况的充要条件是

$$|abc| = 0$$

因三直线不同，所以其方程的系数所构成的方阵的秩为 2.

例 1 在无穷远直线上取两点 A_1, A_2, 又在无穷远直线外取一点 A_3. 以 A_1A_3, A_2A_3 分别为 x 轴, y 轴, A_3为原点建立笛氏齐次坐标系($A_1A_2A_3$ 叫做坐标三点形). 如果有点$P_1(p, g, h)$, $P_2(f, q, h)$, $P_3(f, g, r)$.

(i) 求证: P_2P_3 与A_2A_3 的交点, P_3A_1 与 A_3A_1 的交点, P_1P_2 与 A_1A_2 的交点三点共线并求出所在直线的方程;

(ii) 如果 $fgh = pqr$, 求证: A_1P_2, A_2P_3, A_3P_1 共点, A_1P_3, A_2P_1, A_3P_2 也共点.

证明: (i) P_2P_3 的方程是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f & q & h \\ f & g & r \end{vmatrix} = 0$$

即 $$(qr-gh)x_1+(fh-fr)x_2+(fg-fq)x_3=0$$

又 A_2A_3 的方程是

$$x_1=0$$

所以得 P_2P_3 与 A_2A_3 的交点为$(0, g-q, r-h)$.

同理, P_3P_1 与A_3A_1 的交点为$(p-f, 0, h-r)$.

P_1P_2 与A_1A_2 的交点为$(f-p, q-g, 0)$.

由于 $$\begin{vmatrix} 0 & g-q & r-h \\ p-f & 0 & h-r \\ f-p & q-g & 0 \end{vmatrix} = 0$$

因此，三点共线且所在直线的方程是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p-f & 0 & h-r \\ f-p & q-g & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即 $$\frac{x_1}{p-f}+\frac{x_2}{q-g}+\frac{x_3}{r-h}=0$$

(ii) A_1P_2的方程是 $hx_2-qx_3=0$.

A_2P_3 的方程是 $fx_3-rx_1=0$.

A_3P_1 的方程是 $gx_1-px_2=0$.

此三直线共点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 0 & h & -q \\ -r & 0 & f \\ g & -p & 0 \end{vmatrix}=0$$

即 $\qquad fgh=pqr$

同理可证 $fgh=pqr$ 也是三直线 A_1P_3, A_2P_1, A_3P_2 共点的充要条件.

定理 6.6 以两不同已知点 a, b 的连线为底的点列的点的坐标能够写作且仅能够写作 $la+mb$(其中 l,m 为不全为零的常数).

证明 因为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ la_1+mb_1 & la_2+mb_2 & la_3+mb_3 \end{vmatrix}=0$$

所以，根据定理 6.5 知 $la+mb$ 表示以 a, b 连线为底的点列的点的坐标.

反过来，设 c 为 a,b 连线上的一点，则由于三点 a,b,c 共线，所以根据定理 6.5 有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

因此有不全为零的数 l', m', n' 使

$$l'a_i+m'b_i+n'c_i=0 \qquad (i=1, 2, 3)$$

但是 $n'\neq0$(否则将有 a, b 重合)，所以可令

$$l=-\frac{l'}{n'}, \quad m=-\frac{m'}{n'}$$

因此 $$c_i = la_i + mb_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

(其中 l, m 为不全为零的常数)

即 c 的坐标可以写作

$$c = la + mb$$

推论 三相异点 a, b, c 共线的充要条件是有三个全不为零的常数 p, q, r, 使

$$pa_i + qb_i + rc_i = 0 \qquad (i=1, 2, 3) \tag{6.6}$$

定理 6.6′ 以两不同已知直线 $\alpha=0$, $\beta=0$ 的交点为中心的线束的直线的方程能够写作且仅能够写作

$l\alpha + m\beta = 0$(其中 l, m 为不全为零的常数)

证明 因为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ la_1 + mb_1 & la_2 + mb_2 & la_3 + mb_3 \end{vmatrix} = 0$$

所以, 根据 6.5′ 知 $l\alpha + m\beta = 0$ 表示通过 $\alpha=0$, $\beta=0$ 交点的直线的方程.

反过来, 与定理 6.6 类似, 可以证明通过 $\alpha=0$, $\beta=0$ 的交点的任何直线的方程可以表示为 $l\alpha + m\beta = 0$(其中 l, m 为不全为零的常数)的形式.

推论 三相异直线 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$ 共点的充要条件是有全不为零的常数 p, q, r 使

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = 0 \tag{6.7}$$

例 2 (i) 设平面内三个不共线点 $a \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $b \equiv (b_1, b_2, b_3)$, $c \equiv (c_1, c_2, c_3)$. 求证: 平面内任何点的坐标可以表示为

$$la_i + mb_i + nc_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

(其中 l, m, n 为不全为零的常数)

(ii) 设再有点 $d \equiv (d_1, d_2, d_3)$, a, b, c, d 四点共面其中无三

点共线．求证：有四个全不为零的常数 p, q, r, s 使

$$pa_i+qb_i+rc_i+sd_i=0 \qquad (i=1,2,3)$$

由此再推出：$a、b、c、d$ 四点的坐标可以适当选取为 (a'_1, a'_2, a'_3)，(b'_1, b'_2, b'_3)，(c'_1, c'_2, c'_3)，(d'_1, d'_2, d'_3)，而使

$$a'_i+b'_i+c'_i+d'_i=0 \qquad (i=1,2,3)$$

证明 (i) 设 d 为平面内任何点．

如果 d 为 a, b, c 三者之一，则 l, m, n 中将有两个为零；

如果 d 位于 a, b, c 里某两点的连线上，则 l, m, n 中将有一个为零；

如果 d 不属于上面两种情况，令 t 为 a, d 的连线与 b, c 的连线的交点(图 6-2)．则根据定理 6.6 知

$$d_i=pa_i+qt_i \qquad (i=1,2,3)$$

由于点 d 与 a, t 都不同，所以 $pq\neq0$．同理，

$$t_i=rb_i+sc_i \qquad (i=1,2,3)$$

其中 $rs\neq0$．所以

$$d_i=pa_i+q(rb_i+sc_i)$$

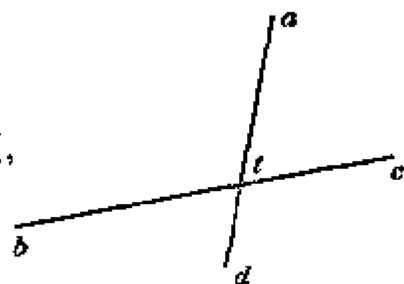


图 6-2

因此 $$d_i=la_i+mb_i+nc_i \qquad (i=1,2,3)$$

其中 $lmn\neq0$．

(ii) 由(i)得

$$pa_i+qb_i+rc_i+sd_i=0 \qquad (i=1,2,3)$$

由于 a, b, c, d 四点不同且无三者共线，所以有 $pqrs\neq0$．

取 $$a'_i\equiv pa_i,\ b'_i\equiv qb_i,\ c'_i\equiv rc_i,\ d'_i=sd_i$$

则得四点 a, b, c, d 的坐标满足

$$a'_i+b'_i+c'_i+d'_i=0 \qquad (i=1,2,3)$$

现在再根据本节的理论用坐标法证明平面上笛沙格定理的逆定理．

例 3 设三点形 $A_1B_1C_1$ 与 $A_2B_2C_2$ 在同一平面内，B_1C_1 与 B_2C_2 的

交点为 X, C_1A_1 与 C_2A_2 的交点为 Y, A_1B_1 与 A_2B_2 的交点为 Z, 且 X, Y, Z 在一直线 l 上.

求证 三直线 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 交于一点

证明 如图 6-3.

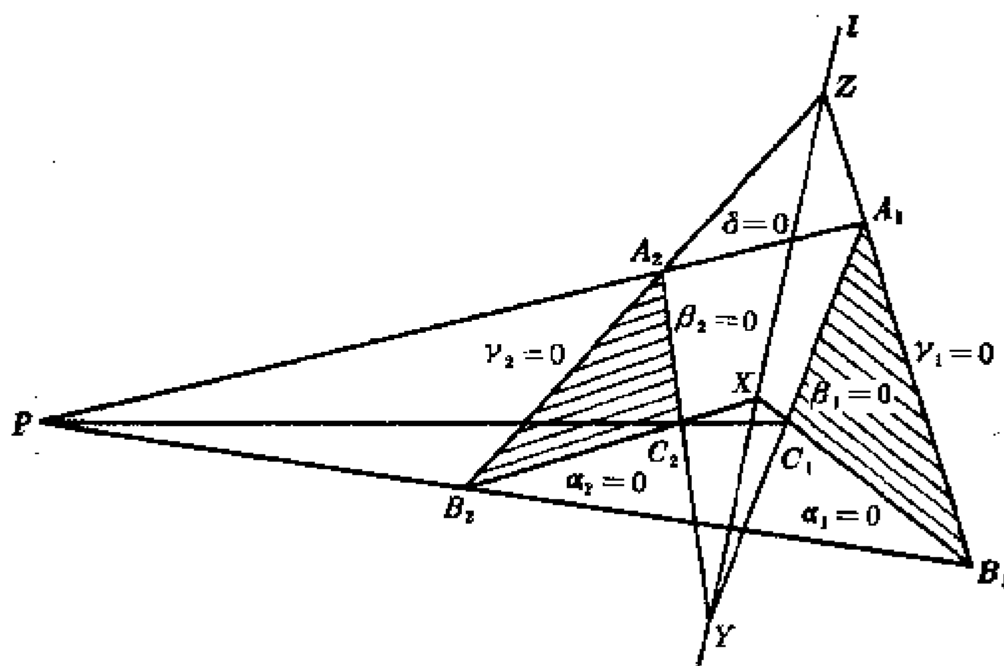


图 6-3

令 $A_1B_1C_1$ 与 $A_2B_2C_2$ 的边的齐次方程分别为

$$\alpha_1=0,\ \beta_1=0,\ \gamma_1=0 \text{ 与 } \alpha_2=0,\ \beta_2=0,\ \gamma_2=0$$

又直线 l 的齐次方程为 $\delta=0$, 则 B_1C_1, B_2C_2, l 三直线交于一点 X. 所以根据定理 6.6′ 有

$$\delta\equiv p_1\alpha_1-p_2\alpha_2$$

同理

$$\delta\equiv q_1\beta_1-q_2\beta_2$$

$$\delta\equiv r_1\gamma_1-r_2\gamma_2$$

其中 $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2$ 是常数. 因此

$$p_1\alpha_1-p_2\alpha_2\equiv q_1\beta_1-q_2\beta_2\equiv r_1\gamma_1-r_2\gamma_2$$

由此推出

$$\left.\begin{aligned} q_1\beta_1-r_1\gamma_1&\equiv q_2\beta_2-r_2\gamma_2\\ r_1\gamma_1-p_1\alpha_1&\equiv r_2\gamma_2-p_2\alpha_2\\ p_1\alpha_1-q_1\beta_1&\equiv p_2\alpha_2-q_2\beta_2\end{aligned}\right\}\qquad(6.8)$$

由(6.8)的第一式得出

$$q_1\beta_1-r_1\gamma_1=0 \text{ 与 } q_2\beta_2-r_2\gamma_2=0^{(*)}$$

表示同一直线。

但 $q_1\beta_1-r_1\gamma_1=0$ 表示的直线通过 A_1，$q_2\beta_2-r_2\gamma_2=0$ 表示的直线通过 A_2，所以此直线就是 A_1A_2。

同理可求得 B_1B_2，C_1C_2 的方程。

因此得到 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 的两组方程如下：

A_1A_2: $q_1\beta_1-r_1\gamma_1=0$, $q_2\beta_2-r_2\gamma_2=0$

B_1B_2: $r_1\gamma_1-p_1\alpha_1=0$, $r_2\gamma_2-p_2\alpha_2=0$

C_1C_2: $p_1\alpha_1-q_1\beta_1=0$, $p_2\alpha_2-q_2\beta_2=0$

每组之和为零．所以根据定理 6.6′ 的推论得三直线 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 交于一点．笛沙格定理的逆定理得证．

例 4 在欧氏平面内，求证：三角形三内角平分线共点．

证明 取原点在三角形内部建立笛氏直角坐标系．

设三边的法式方程分别为：

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0$$

则三内角平分线的方程分别为

$$\beta-\gamma=0,\ \gamma-\alpha=0,\ \alpha-\beta=0$$

因此由定理 6.6′ 的推论得三内角的平分线共点．

习 题

1. 试求下列各题的齐次坐标，先写出所有组再任选一组．

(i) $(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$，$\left(2,\dfrac{5}{3}\right)$；

(ii) 以 $\dfrac{3}{4}$ 为方向的无穷远点；

(iii) $3x+y=0$ 上的无穷远点；

---

* 可以说明它们的确是直线方程．

(iv) 坐标轴上之无穷远点.

2. 如果存在，求下列各点的非齐次坐标：

$(2, 4, -1), (\sqrt{10}, -\sqrt{6}, 2), (0, 1, 0), (0, 4, 3), (1, 4, 0)$

3. 如果正负号任意选取，问$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$表示几个相异点？

4. 求下列直线上的无穷远点：

(i) $x_1+x_2-4x_3=0$;　　(ii) $x_1+2x_2=0$;

(iii) $x_2-3x_3=0$;　　(iv) $x_1+5x_3=0$.

5. 试求以 $2x_1+x_2+x_3=0, 3x_1-4x_2+2x_3=0$, $4x_1+x_2-3x_3=0$ 为边的三角形顶点的坐标.

6. 求两直线 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0, b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$ 的交点与直线 $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0$ 上的无穷远点连线的方程.

7. 求直线 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$ 与 $b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$ 的交点与直线 $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0$ 与 $d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3=0$ 的交点的连线方程，并求出此直线上的无穷远点.

8. 设 A, B, C 为在一直线上的三个不同点. 求证：可以适当选取 A, B 的齐次坐标 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 而使 C 的齐次坐标为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

9. 设以三直线 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$ 为边的一个三点形且有通过三顶点的三条直线. 求证：此三直线共点的充要条件是其方程可以表示为

$q\beta-r\gamma=0, r\gamma-p\alpha=0, p\alpha-q\beta=0$

其中 p, q, r 为常数.

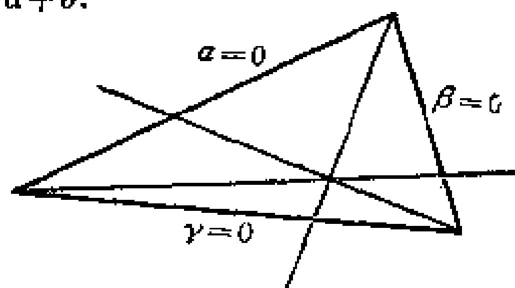


图 6-4

10. 设三点形ABC三边BC, CA, AB的方程分别为$7x-3y+2=0, 3x-5y-1=0, 2x+y-5=0$. 求证：$ABC$与坐标三点形透视，并求出透视轴的方程.

11. 设$O(f, g, h)$，$A_1A_2A_3$是坐标三点形，A_1O, A_2O, A_3O 分别交 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 于 P, Q, R；QR, RP, PQ 分别交 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 于 L, M, N. 求证：三点 L, M, N 共线，并求出此直线的方程.

12. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为三个不共线的点. 求证：平面内三个不同点 $l_i\boldsymbol{a}+m_i\boldsymbol{b}+n_i\boldsymbol{c}\,(l_i^2+m_i^2+n_i^2\neq 0)\,(i=1, 2, 3)$ 共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=0$$

§7 线 坐 标

我们知道，在平面内点是几何的基本元素，对于点引入坐标．曲线是点的轨迹(在这种情况下，曲线称为点曲线)，它有方程．这是点几何的观点．在点几何里，直线是曲线的特例．对偶地，直线也可作为几何的基本元素，采用直线作为基本元素，可以建立线几何学．在线几何里，对于直线引入坐标，曲线是一族直线包络成的图形(在这种情况下，曲线称为线曲线)．图 7-1-1 与图 7-1-2 分别表示一个圆作为点曲线与线曲线的图形．

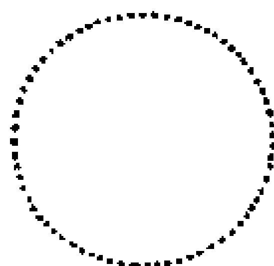


图 7-1-1

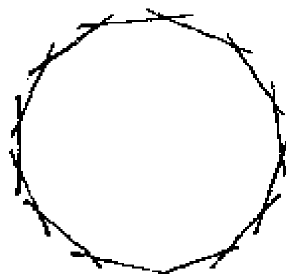


图 7-1-2

建立线几何的首要问题是引入直线的坐标．

7.1 齐次线坐标

在齐次点坐标中，直线的齐次方程是

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \tag{7.1}$$

其中 (x_1, x_2, x_3) 是直线上任一点的流动坐标．显然，方程 $\rho u_1x_1+\rho u_2x_2+\rho u_3x_3=0(\rho\neq 0)$与(7.1)表示同一直线．我们作以下定义．

定义 7.1 直线的齐次方程中，x_1, x_2, x_3 的系数 u_1, u_2, u_3 叫做该直线的齐次线坐标．显然，$\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3(\rho\neq 0)$ 也是该直线的齐次线坐标，因此一直线的齐次线坐标有无穷多组．为了区别于点的坐标，我们把直线 u 的齐次线坐标 u_1, u_2, u_3 记作$[u_1, u_2, u_3]$或

$u\equiv[u_1, u_2, u_3]$.

定理 7.1 一点 $x\equiv(x_1, x_2, x_3)$在一直线$u\equiv[u_1, u_2, u_3]$上的充要条件是

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \tag{7.2}$$

证明 因为直线 u 的方程是 $u_1X_1+u_2X_2+u_3X_3=0$, (X_1, X_2, X_3) 为其上任一点的齐次坐标. 可见点 x 在此直线上的充要条件即为(7.2).

定义 7.2 在齐次线坐标里, 一点的方程指的是以$[u_1, u_2, u_3]$为流动线坐标所构成的方程, 此方程能够且仅能够被通过该点直线的坐标所满足.

定理 7.2 在齐次线坐标里, 一点 $a\equiv(a_1, a_2, a_3)$的方程是

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0 \tag{7.3}$$

反之, $[u_1, u_2, u_3]$构成的一次齐次方程必表示一点.

证明 由定理 7.1, 任一直线$[u_1, u_2, u_3]$ 通过点(a_1, a_2, a_3)的充要条件是$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0$. 根据定义 7.2, $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0$ 是点 $a\equiv(a_1, a_2, a_3)$的方程.

反之, 设有方程 $b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3=0$, 其中b_1, b_2, b_3 不全是零, 则由(7.3)知此方程表示一点(b_1, b_2, b_3).

定义 7.2 的几何意义是说, 在线几何里一点被看成是一束直线包络成的, 这个点的方程被而且只被通过它的直线的坐标所满足. 例如直线 $u\equiv[u_1, u_2, u_3]$通过点(2, 1, 3)当且仅当 $2u_1+u_2+3u_3=0$. 因此由定理 7.2 知 $2u_1+u_2+3u_3=0$ 就是在线坐标里点(2, 1, 3)的方程. 又如在线坐标里原点的方程是 $u_3=0$.

7.2 非齐次线坐标

定义 7.3 直线$u\equiv[u_1, u_2, u_3]$的非齐次线坐标$[U, V]$是由下列比值

$$U=\frac{u_1}{u_3},\qquad V=\frac{u_2}{u_3}$$

所规定，其中 $u_3\neq 0$.

由于通过原点的直线的齐次线坐标为$[u_1, u_2, 0]$，所以通过原点的直线无非齐次线坐标.

在(7.2)式里，设 $U=\frac{u_1}{u_3}$, $V=\frac{u_2}{u_3}$, $x=\frac{x_1}{x_3}$, $y=\frac{x_2}{x_3}$,

其中 $u_3x_3\neq 0$，则得

$$Ux+Vy+1=0 \tag{7.4}$$

根据定理 7.1 可得

定理 7.3 点(x, y)在直线$[U, V]$上的充要条件是

$$Ux+Vy+1=0$$

在非齐次线坐标里，关于点的方程的定义与定义 7.2 完全类似. 我们有以下定理.

定理 7.4 在非齐次线坐标里，点(x_0, y_0)如果不是原点，则它的方程是

$$x_0U+y_0V+1=0 \tag{7.5}$$

反之，$[U, V]$所构成的一次方程(7.5)必表示一点，其坐标为(x_0, y_0).

证明与定理 7.2 类似，故从略.

在点坐标的基础上，可以求点曲线的方程，即动点的轨迹方程(直线方程是它的特例)；现在引入了直线坐标，在此基础上，可以求线曲线的方程，即直线族的方程(点方程是它的特例). 下面举例说明.

例 1 求在两坐标轴上截距之和为常数 c 的直线族的方程.

解 设直线 l 的非齐次线坐标为$[U, V]$，即 l 的非齐次方程为 $Ux+Vy+1=0$.

令 l 在二坐标轴截距为 a, b，则有

$$a=-\frac{1}{U}, \qquad b=-\frac{1}{V}$$

根据题设 $a+b=c$，所以又有

$$-\frac{1}{U}-\frac{1}{V}=c$$

或 $$-V-U=cUV$$

即 $$cUV+U+V=0$$

这就是所求的直线族方程，其齐次方程为

$$u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=0$$

由例1，我们看到直线的非齐次线坐标$[U, V]$的几何意义是：U 与 V 分别是直线在 x 轴与 y 轴截距的负倒数．因此可以根据直线族的方程作出直线族的图形．

例 2 已知直线族方程为 $4UV+U+V=0$，求作其图形．

解

U	V	$Ux+Vy+1=0$
⋮	⋮	⋮
-1	$-\frac{1}{3}$	$x+\frac{y}{3}-1=0$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{x}{2}+\frac{y}{6}-1=0$
1	$-\frac{1}{5}$	$-x+\frac{y}{5}-1=0$
2	$-\frac{2}{9}$	$\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{9}{2}}-1=0$
3	$-\frac{3}{13}$	$\frac{x}{-\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{13}{3}}-1=0$
⋮	⋮	⋮

由已知方程解出V得

$$V=-\frac{U}{4U+1}$$

给定U一些值，根据上式计算V值，从而得到直线方程，可列表如66页所示。

再根据各个直线方程作出图形，如图7-2.我们看到，这种作图方法与点几何里根据轨迹方程用逐点描迹的方法作出曲线很类似。当然这是比较原始的讨论曲线的方法。

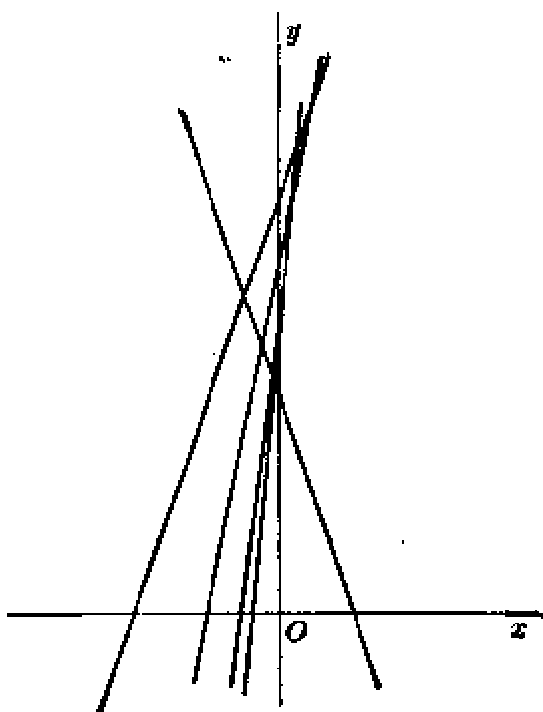


图 7-2

习　　题

1. 求下列各直线的坐标(齐次与非齐次)(i) x轴；(ii) y轴；(iii) 无穷远直线；(iv) 通过原点、斜率为2的直线.

2. 求下列各线坐标所表示直线的方程：

$$[0, 1, 1], [1, 1, -1], [1, 0, 1], [1, -1, 0]$$

3. 问下列各方程表示什么图形？

$$u_1=0,\ u_2-u_3=0,\ u_1+u_2+u_3=0,\ 2u_1+u_2=0$$
$$u_1^2-5u_1u_2+4u_2^2=0,\ U^2-3U+2=0$$

4. 求下列各点的线坐标方程(齐次与非齐次)：(i) x轴上的无穷远点；(ii) y轴上的无穷远点；(iii) 斜率为$-\frac{1}{2}$方向的无穷远点；(iv) 点(2, 4, −3).

5. 求两点(x_1, y_1)与(x_2, y_2)的连线与直线$[U, V]$的交点的坐标与方程.

6. 求两直线$ax^2+2hxy+by^2=0$上的无穷远点的方程.

7. 求证：方程$u_1^2+3u_1u_2-u_2^2=0$决定的点在垂直方向上.

8. 求与两点(−2, 0), (2, 0)距离之积为4的直线族的方程.

9*. 设M与N是从一点P至两坐标轴的垂足，当点P描出下列曲线时，求直线族MN的方程：(i) $x+y=1$；(ii) $y=x^3$.

§8 对偶原则

由于射影平面与欧氏平面的结构不同，因此它具有一些特殊的属性，对偶原则就是射影几何的一个重要特性。例如在欧氏平面内两条直线不一定相交，而在射影平面内两条直线必相交于一点。这与通过两点必有一直线二者互为对偶。又如关于点与直线的结合性，一点在一直线上与一直线通过一点二者也是互为对偶的。本节说明对偶原则。

8.1 对偶图形

定义 8.1 "点"与"直线"叫做(平面上的)对偶元素。

定义 8.2 "通过一点作一直线"与"在一直线上取一点"叫做对偶运算。

定义 8.3 设有点与直线所组成的一个图形，将此图形中的各元素改为它的对偶元素，各运算改为它的对偶运算，其结果形成另一个图形，则这两个图形叫做对偶图形。

例如点列与线束是对偶图形。点列与线束叫做一维基本形。

作为对偶图形的例子，我们再引入后面常用到的一些图形。

平面形 在射影平面内，以点、直线所组成的图形叫做平面形。

简单的平面形

由 n 个点(其中无三者共线)及它们顺次两两的连线所组成的平面形叫做简单的(平面) n 点形。这 n 个点叫做顶点，n 条连线叫做边。

由 n 条直线（其中无三者共点）及它们顺次两两的交点所组成的平面形叫做简单的(平面) n 线形。这 n 条直线叫做边，n 个交点叫做顶点。

完全的平面形

由 n 个点（其中无三者共线）及它们所有两个点的连线所组成的平面形叫做完全的（平面）n 点形．这 n 个点叫做顶点，$\frac{n(n-1)}{2}$条连线叫做边．

由 n 条直线（其中无三者共点）及它们所有两条直线交点所组成的平面形叫做完全的（平面）n 线形．这 n 条直线叫做边，$\frac{n(n-1)}{2}$个交点叫做顶点．

在§5里曾定义过三点形与三线形，根据上述简单形与完全形的概念，显然简单的三点形和三线形与完全的三点形和三线形有相同的图形，故可简称为三点形．

由于三点形与其对偶图形三线形是相同的，因此称这种情况为自对偶．互为对偶的两个图形一般是不同的．

简单四点形与四线形

由四个点（其中无三者共线）A, B, C, D 及它们顺次两两的连线 AB, BC, CD, DA 所组成的平面形叫做简单四点形．A, B, C, D 叫做顶点，AB, BC, CD, DA 叫做边．不顺次的顶点的连线 AC, BD 叫做对顶线（图 8-1-1）．

由四条直线（其中无三者共点）a, b, c, d 及它们顺次两两交点 $(a,b), (b,c), (c,d), (d,a)$ 所组成的平面形叫做简单四线形．a, b, c, d 叫做边，$(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)$ 叫做顶点，不顺次两边的交点 $(a, c), (b, d)$ 叫做对边点（图 8-1-2）．

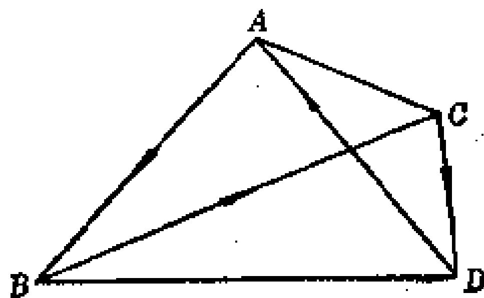


图 8-1-1

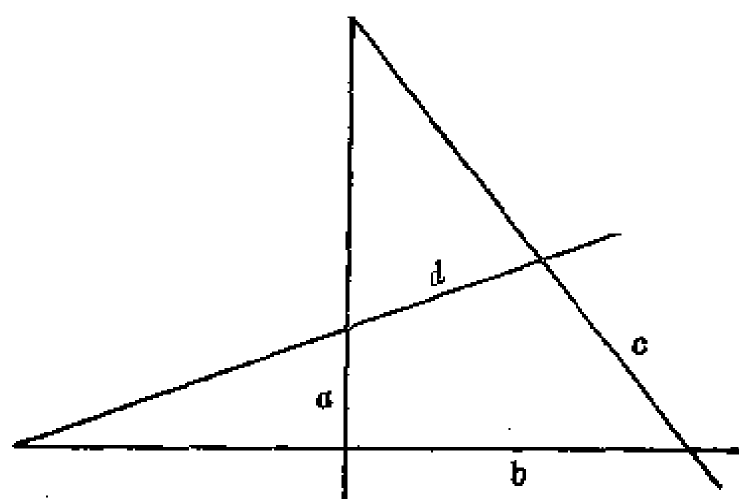


图 8-1-2

注意：简单四点形的构成与顶点的顺序有关，如图 8-1-1 表示四点形 $ABCD$，它与四点形 $ACBD$，$BDAC$ 等不同．同样，简单四线形的构成与边的顺序有关．

完全四点形与四线形

由四个点（其中无三者共线）及连结其中任何两个点的六条直线所组成的平面形叫做完全四点形．这四个点叫做顶点，六条直线叫做边，没有公共顶点的两边叫做对边，对边的交点叫做对边点，对边点构成的一个三点形叫做对边三点形（或中心三点形）．

如图 8-2-1 表示完全四点形 $ABCD$，A, B, C, D 是四个顶点，p, q, r, s, t, u 是六条边，其中 p 与 q，r 与 s，t 与 u 是三对对边；对边的交点 X, Y, Z 是对边点，XYZ 是对边三点形．

由四条直线（其中无三者共点）及其中任何两条直线的六个交点所组成的平面形叫做完全四线形．这四条直线叫做边，六个点叫做顶点，没有公共边的两顶点叫做对顶点，对顶点的连线叫做对顶线，对顶线构成的一个三线形叫做对顶三线形（或中心三线形）．

如图 8-2-2 表示完全四线形 $abcd$，a, b, c, d 是四条边，P, Q, R, S, T, U 是六个顶点，其中 P 与 Q，R 与 S，T 与 U 是三对对顶点；对顶点的连线 x, y, z 是对顶线，xyz 是对顶三线形．

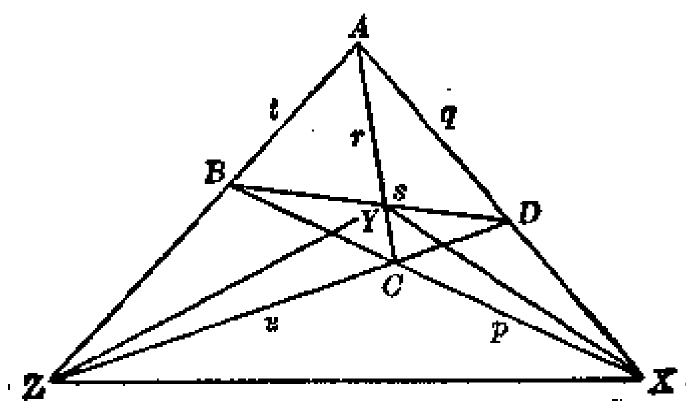


图 8-2-1

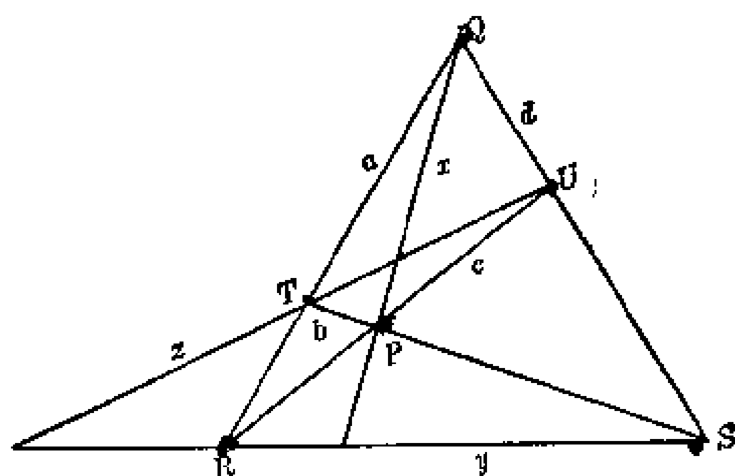


图 8-2-2

上面所讨论的是二维射影空间（射影平面）中的对偶图形．在三维射影空间中，关于对偶问题，我们有以下定义．

定义 8.4 “点”与“平面”叫做对偶元素．

可以推出，在空间里直线的对偶元素仍是直线．

定义 8.5 “通过一点作一直线”与“在一平面上取一直线”、“通过一直线作一平面”与“在一直线上取一点”、“通过一点作一平面”与“在一平面上取一点”都叫做对偶运算．

定义 8.6 设有点、直线和平面所组成的一个图形，将此图形中各元素改为它的对偶元素，各运算改为它的对偶运算，其结果形成另一个图形，则这两个图形叫做对偶图形．

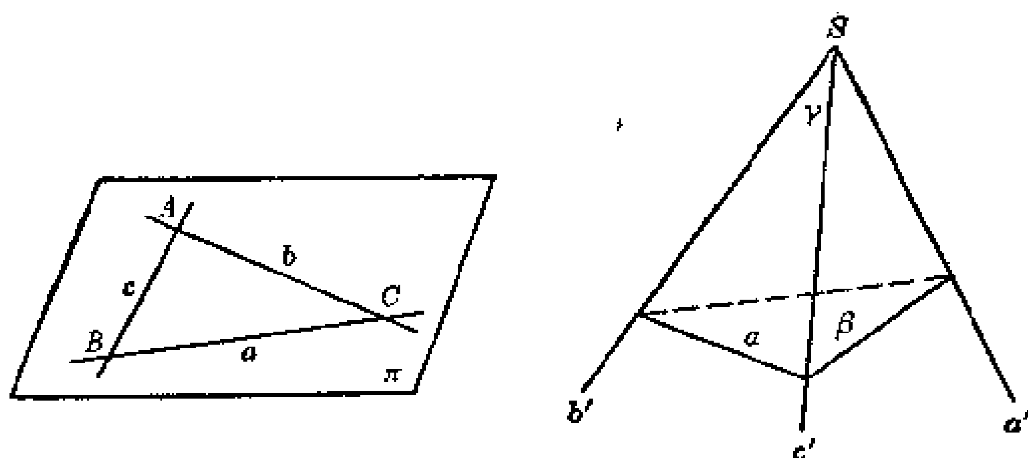


图 8-3

例如，在空间里点列与面束(通过一直线的所有平面的集合)是对偶图形。

又如平面 π 内的三点形 ABC 的对偶图形为以点 S 为顶点的三面形 $\alpha\beta\gamma$ (图 8-3)，点 S 是平面 π 的对偶；平面 α, β, γ 分别是三点形顶点 A, B, C 的对偶；三面形的棱 a', b', c' 分别是三点形的边 a, b, c 的对偶。

8.2 对偶命题与对偶原则

上面我们定义了对偶元素、对偶运算与对偶图形．由于在射影平面(空间)里，点与直线(点与平面)关系的对等性，我们可以从有关几何元素位置关系的一个命题得到它的对偶命题，这两个命题同时具有真伪性，这就是射影几何的对偶原则．

定义 8.7 在射影平面里，设有点、直线及其相互结合与顺序关系(*)所构成的一个命题，将此命题中的各元素改为它的对偶元素，各运算改为它的对偶运算，其结果形成另一个命题．则这两个命题叫做平面对偶命题．

对于射影空间，则有以下定义．

定义 8.8 设有点、直线、平面及其相互结合与顺序关系所构

---

* 射影平面的结合与顺序关系的论述见第七章．

成的一个命题，将此命题中的各元素改为它的对偶元素，各运算改为它的对偶运算，其结果形成另一个命题，则这两个命题叫做空间对偶命题．

对偶原则　在射影平面或射影空间里，如果一个命题成立，则对偶命题也成立．

必须指出，关于对偶原则的严格证明，应该从射影几何的公理系统着手，这超出了本书的范围．不过在后面 8.3 里，我们从坐标与方程出发还是可以说明对偶原则的真实性的．

命题 A 的平面对偶命题与空间对偶命题分别记以 P_A, S_A．

例 1　A: 通过不同两点必有一直线．

P_A: 两不同直线必有一公共点．

S_A: 两不同平面必有一公共直线．

例 2　A: 笛沙格定理．

P_A: 如果两个三线形的对应边的交点在一直线上，则对应顶点的连线交于一点．

由于三点形与三线形是自对偶图形，我们看到，就两个三点形在同一平面的情况来说，笛沙格定理的对偶定理就是它的逆定理．在 § 5 与 § 6 中，对笛沙格定理及其逆定理曾分别给予证明（§ 6用代数法只证明了平面情况），根据对偶原则，只需证明其一，另一个也成立．

关于 S_A 留给读者考虑．

例 3　A: 如果两个完全四点形的五对对应边的交点在同一直线上，则其第六对对应边的交点也在此直线上，且其四对对应顶点的连线交于一点．

P_A: 如果两个完全四线形的五对对应顶点的连线通过同一点，则第六对对应顶点的连线也通过此点，且其四对对应边的交点在同一直线上．

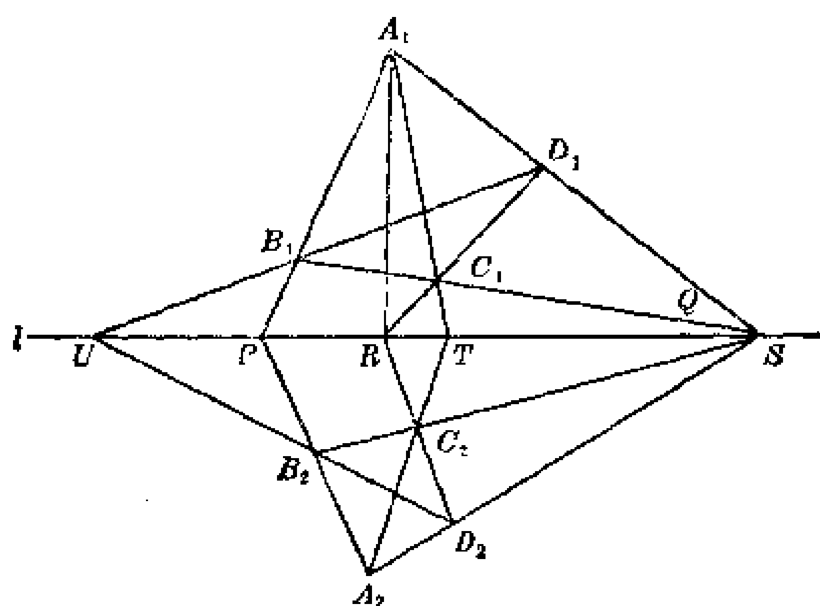


图 8-4-1

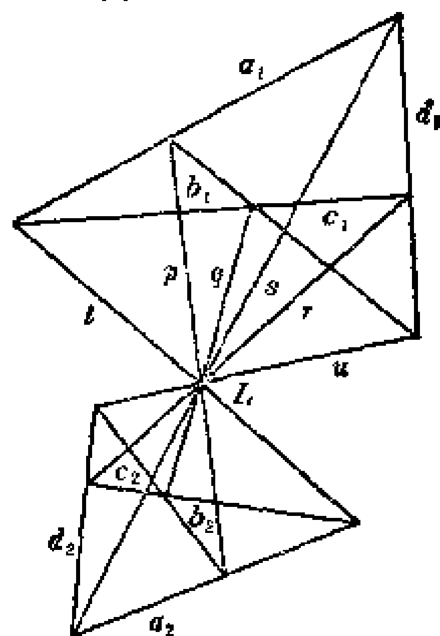


图 8-4-2

图 8-4-1 与图 8-4-2 分别表示命题 A 与 P_A 的图形，其中同一字母大写与小写互为对偶元素. 读者可以考虑根据笛沙格定理证明命题 A，从而命题 P_A 也成立.

对偶原则是射影几何的重要方法之一，根据它，证明了一个定理同时也就证明了这个定理的对偶定理，因此有事半功倍之效. 值

得注意的是，对偶原则是射影几何所特有的，它只适用于几何元素结合与顺序关系的命题，而不能应用于度量关系．例如不能求长度为 2 的线段或 30° 角的对偶图形．

8.3　代数对偶

点几何与线几何的基本观点已如上述，在点几何里，点有坐标，直线有方程．而在线几何里，直线有坐标，点有方程．我们看到，说明点与直线结合关系的形如 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 的等式，现在可以有两种不同的解释：

(1) (x_1, x_2, x_3)是变数，$[u_1, u_2, u_3]$是常数，这时上式说明动点(x_1, x_2, x_3)在定直线$[u_1, u_2, u_3]$上，$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 是直线的方程．

(2) $[u_1, u_2, u_3]$是变数，(x_1, x_2, x_3)是常数，这时上式说明动直线 $[u_1, u_2, u_3]$通过定点(x_1, x_2, x_3)，$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 是点的方程．

以上对于方程的不同解释表明，在射影平面上点与直线处于同等的地位(即关于点的坐标(x_1, x_2, x_3) 与直线的坐标 $[u_1, u_2, u_3]$是完全对称的)，从而体现了它们的代数对偶性．

下面再列举一些对偶命题．

定理 8.1　两点重合的充要条件为其坐标所构成矩阵或其方程系数矩阵的秩是 1．

定理 8.2　两个不同点 a 与 b 连线的方程是

$$|xab|=0 \qquad (8.1)$$

它的坐标是

$$\left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right]$$

定理 8.1′　两直线重合的充要条件为其坐标所构成矩阵或其方程系数矩阵的秩是 1．

定理 8.2′　两条不同直线 a 与 b 交点的方程是

$$|uab|=0 \qquad (8.1')$$

它的坐标是

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

定理 8.3 三个不同点共线的充要条件是其坐标所构成矩阵或其方程系数方阵的秩是 2.

定理 8.4 以两个不同点 a 与 b 的连线为底的点列的点的坐标能够写作且仅能够写作

$$la+mb \tag{8.2}$$

或以两个不同点 $\alpha=0$ 与 $\beta=0$ 的连线为底的点列的点的方程能够写作且仅能够写作

$$l\alpha+m\beta=0 \tag{8.3}$$

这里 l, m 为不全为零的常数.

推论 三个不同点 a, b, c 共线的充要条件是: 有三个全不为零的常数 p, q, r 使

$$pa_i+qb_i+rc_i=0 \tag{8.4}$$

或三个不同点 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$ 共线的充要条件是: 有三个全不为零的常数 p, q, r 而使

$$p\alpha+q\beta+r\gamma=0 \tag{8.5}$$

定理 8.3′ 三条不同直线共点的充要条件是其坐标所构成矩阵或其方程系数方阵的秩是 2.

定理 8.4′ 以两条不同直线 a 与 b 的交点为中心的线束的直线的坐标能够写作且仅能够写作

$$la+mb \tag{8.2′}$$

或以两条不同直线 $\alpha=0$ 与 $\beta=0$ 的交点为中心的线束的直线的方程能够写作且仅能够写作

$$l\alpha+m\beta=0 \tag{8.3′}$$

这里 l, m 为不全为零的常数.

推论 三条不同直线 a, b, c 共点的充要条件是: 有三个全不为零的常数 p, q, r 使

$$pa_i+qb_i+rc_i=0 \tag{8.4′}$$

或三条不同直线 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$ 共点的充要条件是有三个全不为零的常数 p, q, r 使

$$p\alpha+q\beta+r\gamma=0 \tag{8.5′}$$

将以上定理与定理 6.3—定理 6.6 对照, 我们看到这里的每个定理在 §6 都已经证明了半部分, 另半部分根据代数对偶性就不需要再进行证明而承认其正确性.

例 4 给定线曲线方程 $u_1u_3=u_2^2$, 求通过点 $(-2, 1, 2)$ 的该曲线的切线上的无穷远点的方程.

解 首先一般地说明这种问题的解法.

设有线曲线 s，通过点 P 的 s 的切线就是通过 P 属于构成 s 的直线族中的直线．又一直线上的无穷远点就是该直线与无穷远直线的交点．

因此问题即为求通过点 P 属于 s 的直线 a,b 与 l_∞ 的交点(图 8-5-1)．

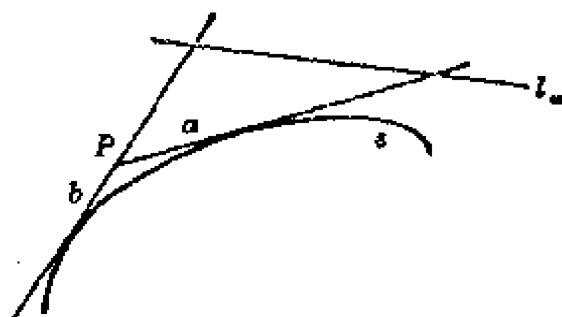


图 8-5-1

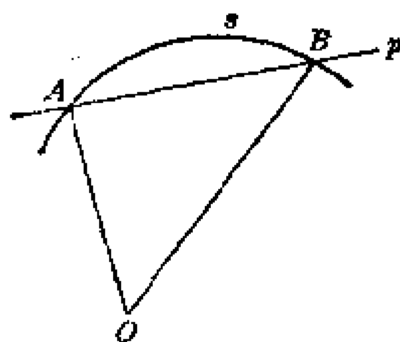


图 8-5-2

这个问题的对偶是给定点曲线 s 和直线 p，求直线 p 与 s 的交点 A,B 与原点的连线 OA,OB 的方程(图 8-5-2)．OA,OB 的方程可以由 s,p 的齐次方程消去 x_3 而得到．

因此原问题所求的无穷远点的方程，可以由 s,p 的齐次方程消去 u_3 而得到

在本题中，点 P 的齐次方程为

$$-2u_1+u_2+2u_3=0$$

所以由

$$\begin{cases} u_1u_3-u_2^2=0 \\ -2u_1+u_2+2u_3=0 \end{cases}$$

消去 u_3 得

$$2u_1^2-u_1u_2-2u_2^2=0$$

这就是所求无穷远点的方程的乘积．两个无穷远点的坐标为

$$(4,\ -1\mp\sqrt{17},0)$$

习　题

1. 求作下列图形的平面对偶图形.

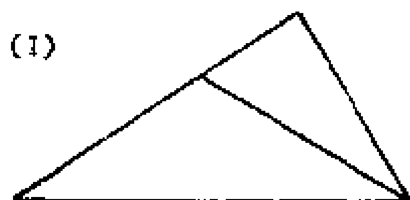


图　8-6



图　8-7

2. 写出下列命题的平面对偶命题.

设一个变动的三点形,它的两边各通过一个定点,且三顶点在共点的三条定直线上. 求证:第三边也通过一个定点.

3. 写出下列命题的平面对偶命题与空间对偶命题.

设平面π内两条直线l_1与l_2上各取三点A_1, B_1, C_1与A_2, B_2, C_2. 求证:B_1C_2与B_2C_1的交点、C_1A_2与C_2A_1的交点、A_1B_2与A_2B_1的交点三点共线(这个命题称为巴卜斯(Pappus)命题).

4. 求作下列图形的平面对偶图形与空间对偶图形并用文字注明对偶元素.

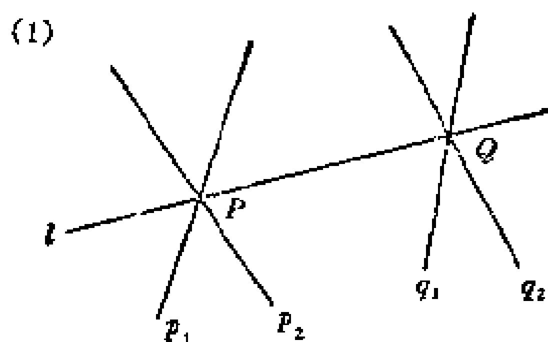


图　8-8

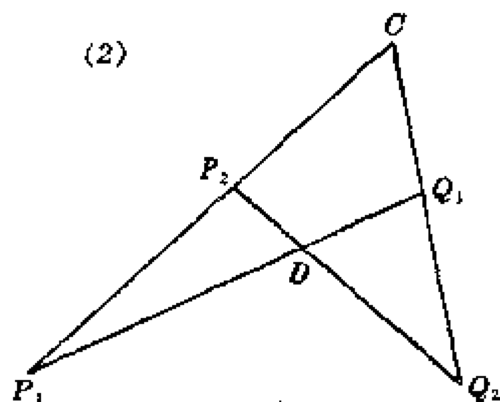


图　8-9

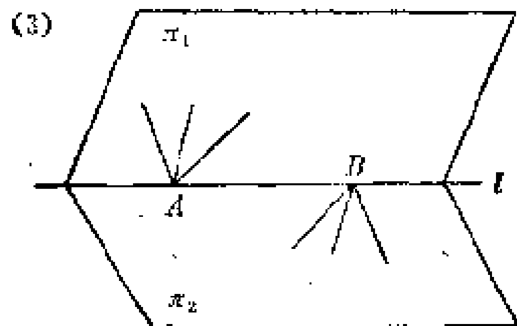


图　8-10

5. 利用对偶原则证明下列命题.

设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是四个不同的平面，并且 α,β 的交线与 γ,δ 的交线共面. 求证：四平面共点，且 α,γ 的交线与 β,δ 的交线以及 α,δ 的交线与 β,γ 的交线也分别共面.

6. 求两点 $3u_1+4u_2-11u_3=0$, $5u_1-3u_2+u_3=0$ 的连线的坐标.

7. 求通过两直线[1, 1, 1], [2, 1, 3]交点与点 $2u_1+3u_2+u_3=0$ 的直线的坐标.

8. 求证：两点 a, b 的连线与直线 c 的交点坐标为 $(b|c)a-(a|c)b$，其中 $b|c=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3$.

9. 求证：两点 a, b 的连线与两点 c, d 的连线的交点为 $|bcd|a-|acd|b$ 或 $|abd|c-|abc|d$.

10. 写出§6习题 8、9 的对偶命题并考虑其证明.

11. 用线坐标证明笛沙格定理并与§6 例 3 其逆定理的证明加以比较.

§9 复元素

9.1 二维空间的复元素

为了深入认识一些问题，除无穷远元素外还需要引入复元素(复点、复直线). 引入复元素是很必要的，例如在初等几何里，一条直线与一个椭圆的关系是相交(相切看作是交于一点)或不相交两种情况，有了复元素我们就可以把这两种情况统一起来，说直线与椭圆一定是相交的. 它们不相交，指的是在实数范围内没有交点；在复数范围内，它们是有交点的. 这是由于一个一次方程与一个二次方程总有公共解，它们可能是实的，也可能是虚的. 当然，引入复元素的作用远不止于此，以后将会进一步看到.

点 设有一对有序的复数 $x=x'+x''i$, $y=y'+y''i$. 如果 x, y 都是实数，则 (x, y) 为一实点的坐标，如果 x 或 y 为虚数或二者均为虚数，则规定一个新点叫做虚点，仍以 (x, y) 为其坐标. 实点与虚点合称为复点.

对于复点同样可以引入齐次坐标(x_1, x_2, x_3)，其中$x_1=x_1'+x_1''i$，$x_2=x_2'+x_2''i$，$x_3=x_3'+x_3''i$.

如果(x_1, x_2, x_3)与三个不全为零的实数成比例，则规定为一实点的齐次坐标. 例如$(2,0,4)$，$(2i,0,4i)$，$(2-2i,0,4-4i)$为同一实点的齐次坐标.

如果(x_1, x_2, x_3)不与任何三个不全为零的实数成比例，则$(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$（其中$\rho$为任何非零复数）规定为一虚点的齐次坐标。

设有复点(x_1, x_2, x_3)，当$x_3\neq 0$时，则(x_1, x_2, x_3)为一有穷远复点（或为实点或为虚点），它的非齐次坐标(x, y)满足

$$x=\frac{x_1}{x_3}, \qquad y=\frac{x_2}{x_3}$$

当$x_3=0$时（即$x_3'=x_3''=0$时），则(x_1, x_2, x_3)为一无穷远复点（或为实点或为虚点），它无非齐次坐标.

所有复点的集合叫做复射影平面.

直线 复直线的引入与复点的引入类似，即将线坐标推广到复数范围.

点与直线的结合关系 由定理7.1，实点x在实直线u上的充要条件是

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

现在仍采取此等式为复点x在复直线u上的充要条件. 因此可以推出：

$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0$（其中$[u_1, u_2, u_3]$是流动线坐标）是复点a的方程.

$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$（其中(x_1, x_2, x_3)是流动点坐标）是复直线的方程.

这说明代数对偶性对于复点、复直线仍然成立，所以在8.3里

所列举的有关点与直线结合关系的命题对于复元素也成立.

9.2 二维共轭复元素

我们知道，两个复数 $a=a'+a''i$, $\bar{a}=a'-a''i$ 叫做共轭复数. 特别地，如果 $a''\neq 0$, 则叫做共轭虚数.

定义 9.1 如果(a_1, a_2, a_3)为一个元素（点或直线）的齐次坐标，$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ 将为另一个同类元素（点或直线)的齐次坐标，则此二元素叫做共轭复元素.

由定义9.1可见，两个第三坐标不是零的元素为共轭复元素必须且只须其对应的非齐次坐标为共轭复数. 两个共轭复元素的对应齐次坐标不一定为共轭复数. 原因是齐次坐标允许差一个常数因子. 例如$(2, i, 1-i)$与$(2+2i, 1-i, 2i)$为两个共轭复点的齐次坐标，这由于$(2, -i, 1+i)$与$(2+2i, 1-i, 2i)$是同一点的齐次坐标. 若考虑非齐次坐标，$\left(\frac{2}{1-i}, \frac{i}{1-i}\right)$取共轭即得$\left(\frac{2+2i}{2i}, \frac{1-i}{2i}\right)$.

定理 9.1 一元素为实元素的充要条件为该元素与其共轭复元素重合.

证明 必要性. 一实元素的齐次坐标为实数，因此与其共轭复元素有相同的坐标，所以与已知元素重合.

充分性 分以下两种情况证明.

(1) 如果两个共轭复元素不是无穷远点或通过原点的直线，则其齐次坐标可以写作

$$(a_1, a_2, a_3)与(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$$

且第三坐标 $a_3=\bar{a}_3=1$.

由于两元素重合，有

$$\frac{a_1}{\bar{a}_1}=\frac{a_2}{\bar{a}_2}=\frac{a_3}{\bar{a}_3}$$

因此

$$a_1=\bar{a}_1,\quad a_2=\bar{a}_2$$

即一复数与共轭复数相等，所以必为实数．因此$(a_1,\ a_2,\ a_3)$为实元素．

(2) 如果两个共轭复元素是无穷远点或通过原点的直线．则其齐次坐标为

$$(a_1, a_2, 0)\text{与}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, 0)$$

由于两元素重合，有

$$\frac{a_1}{\bar{a}_1}=\frac{a_2}{\bar{a}_2}$$

因此

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2}$$

所以$\frac{a_1}{a_2}$是实数，$(a_1, a_2, 0)$是实元素．

定理 9.2 如果点x在直线u上，则x的共轭复点$\bar{x}$在u的共轭复直线$\bar{u}$上．

证明 我们知道$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}$，$\overline{ab}=\bar{a}\bar{b}$．所以

$$\overline{u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3}=\bar{u}_1\bar{x}_1+\bar{u}_2\bar{x}_2+\bar{u}_3\bar{x}_3$$

因此，如果$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$，则$\bar{u}_1\bar{x}_1+\bar{u}_2\bar{x}_2+\bar{u}_3\bar{x}_3=0$．所以如果点$x$在直线$u$上，则点$\bar{x}$在直线$\bar{u}$上

定理 9.2 的特殊情况是：如果一虚点在一实直线上，则其共轭虚点也在该实直线上．因此有以下结论

一实直线上的点或为实点或为成对的共轭虚点，通过一实点的直线或为实直线或为成对的共轭虚直线．

定理 9.3 两共轭虚直线的交点为一实点，两共轭虚点的连线为一实直线．

证明 (1) 设u与$\bar{u}$为两共轭虚直线，点P为其交点．则由定理 9.2 知，P的共轭复点$\bar{P}$在$\bar{u}$与u上．因此$\bar{P}$与P重合．再

由定理 9.1 知，P 是一实点.

(2) 设 a 与 $\bar{a}$ 为两共轭虚点，则其连线 l 的线坐标为

$$[a_2\bar{a}_3-a_3\bar{a}_2,\ a_3\bar{a}_1-a_1\bar{a}_3,\ a_1\bar{a}_2-a_2\bar{a}_1]$$

其共轭虚直线 $\bar{l}$ 的坐标可化为

$$[\bar{a}_2a_3-\bar{a}_3a_2,\ \bar{a}_3a_1-\bar{a}_1a_3,\ \bar{a}_1a_2-\bar{a}_2a_1]$$

此为 l 坐标的负值，所以 $\bar{l}$ 与 l 重合. 于是由定理 9.1 知 l 是一实直线.

推论 在一虚直线上有唯一一个实点，通过一虚点有唯一一条实直线.

证明 一虚直线上的实点就是此直线与其共轭虚直线的交点，如果再有另一个实点，则此直线将为实直线，而与假设矛盾.

同理可证另一结论.

习　题

1. (1) 求连结两点$(1+i, 2-i, 1)$与$(1-i, 2+i, 1)$的直线方程.

(2) 求证：三点$(1+i, -1+i)$, $(1, 1+i)$, $(i, -1-i)$共线，并求其上的实点.

(3) 求证：三点$(1, -i, 0)$, $(1, i, 0)$, $(1, -1, 0)$共线，并将最后一点的坐标表示为前两点坐标的线性组合.

2. 求直线$(1-i)x_1+(2+i)x_2+3ix_3=0$上的实点.

3. (1) 求通过点$(1, i, 0)$的实直线.

(2) 求直线$[2, i, 3-4i]$上的实点.

4. 求证：两复点所决定的复直线与其两共轭复点所决定的复直线为共轭复直线.

又问此命题的对偶命题如何?

5. 求两圆 $x_1^2+x_2^2=5x_3^2$ 与 $(x_1-3x_3)^2+x_2^2=8x_3^2$ 的交点.

6. 求证：虚直线上的实点是该直线上的无穷远点的充要条件是该直线有实斜率或平行于 y 轴.

第三章 射影变换

本章首先在欧氏几何的基础上对于点列与线束引入基本的射影不变量——交比．然后讨论两个同类一维基本形之间的射影对应与射影变换及其重要特殊情况对合．在此基础上再讨论二维射影变换．最后介绍射影坐标．

§10 交比与调和比

10.1 点列的四点的交比与调和比

我们知道，单比是仿射变换的基本不变量，但对于中心投影来说，单比不是不变量．这样就发生如何建立中心投影的基本不变量的问题，这个基本不变量就是交比．

定义 10.1 四个共线点 P_1, P_2, P_3, P_4 的交比定义为两个单比 $(P_1P_2P_3)$ 与 $(P_1P_2P_4)$ 的比，用符号 (P_1P_2, P_3P_4) 表示，即

$$(P_1P_2, P_3P_4)=\frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)} \tag{10.1}$$

其中 P_1, P_2 叫做基点偶，P_3, P_4 叫做分点偶．

现在证明交比的一些基本性质．

定理 10.1 基点偶与分点偶交换，交比的值不变，即

$$(P_3P_4, P_1P_2)=(P_1P_2, P_3P_4) \tag{10.2}$$

证明 根据交比的定义有：

$$(P_1P_2, P_3P_4)=\frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)}=\frac{\dfrac{P_1P_3}{P_2P_3}}{\dfrac{P_1P_4}{P_2P_4}}=\frac{P_1P_3\cdot P_2P_4}{P_2P_3\cdot P_1P_4} \tag{10.1$'$}$$

$$(P_3P_4, P_1P_2)=\frac{(P_3P_4P_1)}{(P_3P_4P_2)}=\frac{\dfrac{P_3P_1}{P_4P_1}}{\dfrac{P_3P_2}{P_4P_2}}=\frac{P_3P_1\cdot P_4P_2}{P_4P_1\cdot P_3P_2}$$

而

$$\frac{P_1P_3\cdot P_2P_4}{P_2P_3\cdot P_1P_4}=\frac{P_3P_1\cdot P_4P_2}{P_4P_1\cdot P_3P_2}$$

所以

$$(P_3P_4, P_1P_2)=(P_1P_2, P_3P_4)$$

注意，由(10.1)′容易知道，如果点偶 P_1, P_2 不分离点偶 P_3, P_4，则交比$(P_1P_2, P_3P_4)>0$；如果点偶 P_1, P_2 分离点偶 P_3, P_4，则交比$(P_1P_2, P_3P_4)<0$.

定理 10.2 基点偶的两个字母交换或分点偶的两个字母交换，交比的值变为原来的交比值的倒数，即

$$(P_2P_1, P_3P_4)=(P_1P_2, P_4P_3)=\frac{1}{(P_1P_2, P_3P_4)} \tag{10.3}$$

证明

根据交比的定义有

$$(P_1P_2, P_4P_3)=\frac{(P_1P_2P_4)}{(P_1P_2P_3)}=\frac{1}{\dfrac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)}}=\frac{1}{(P_1P_2, P_3P_4)}$$

又

$$(P_2P_1, P_3P_4)=(P_3P_4, P_2P_1)=\frac{1}{(P_3P_4, P_1P_2)}$$

$$=\frac{1}{(P_1P_2, P_3P_4)}$$

定理10.3 同时交换每个点偶里的字母，交比的值不变．即

$$(P_2P_1, P_4P_3)=(P_1P_2, P_3P_4) \tag{10.4}$$

证明略.

定理 10.4 交换中间的两个字母或交换两端的两个字母，交

比的值等于1减原来的交比值，即

$$(P_1P_3, P_2P_4) = (P_4P_2, P_3P_1) = 1 - (P_1P_2, P_3P_4) \tag{10.5}$$

证明

$$\begin{aligned}(P_1P_3, P_2P_4) &= \frac{P_1P_2 \cdot P_3P_4}{P_3P_2 \cdot P_1P_4} = \frac{(P_1P_3 + P_3P_2)(P_3P_2 + P_2P_4)}{P_1P_4 \cdot P_3P_2} \\ &= \frac{P_1P_3 \cdot P_2P_4 + P_3P_2(P_1P_3 + P_3P_2 + P_2P_4)}{P_1P_4 \cdot P_3P_2} \\ &= \frac{P_2P_3 \cdot P_1P_4}{P_2P_3 \cdot P_1P_4} - \frac{P_1P_3 \cdot P_2P_4}{P_2P_3 \cdot P_1P_4} \\ &= 1 - (P_1P_2, P_3P_4)\end{aligned}$$

再根据定理10.1、定理10.3得：

$$\begin{aligned}(P_4P_2, P_3P_1) = (P_3P_1, P_4P_2) &= (P_1P_3, P_2P_4) \\ &= 1 - (P_1P_2, P_3P_4)\end{aligned}$$

共线四点 P_1, P_2, P_3, P_4（简记为1, 2, 3, 4）能构成 $4! = 24$ 种排列，因此有24个交比．根据以上定理，这24个交比可以分为六类（每类的四个交比值相等）如下：

$$\left.\begin{aligned} r &= (12, 34) = (34, 12) = (21, 43) = (43, 21) \\ \frac{1}{r} &= (21, 34) = (34, 21) = (43, 12) = (12, 43) \\ 1 - r &= (13, 24) = (24, 13) = (42, 31) = (31, 42) \\ \frac{1}{1-r} &= (31, 24) = (24, 31) = (42, 13) = (13, 42) \\ 1 - \frac{1}{r} &= (14, 23) = (23, 14) = (32, 41) = (41, 32) \\ \frac{r}{r-1} &= (41, 23) = (23, 41) = (32, 14) = (14, 32) \end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

10.2 交比的代数表示

设点 P_1, P_2, P 的坐标分别为$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y)$. 单比$(P_1P_2P)=\mu$.

$$x=\frac{x_1-\mu x_2}{1-\mu}, \qquad y=\frac{y_1-\mu y_2}{1-\mu} \tag{10.7}$$

如果 $\mu=1$,(10.7)式无意义. 但不难知道,若 μ 以 1 为极限,则点 P 将趋于无穷远.

再考虑 P 的齐次坐标$(x_1-\mu x_2, y_1-\mu y_2, 1-\mu)$. 当 $\mu=1$ 时得到 P_1, P_2 所在直线上的无穷远点. 所以

$$(P_1P_2P_\infty)=1 \tag{10.8}$$

这就是说,一直线上的无穷远点分其上任何两点的单比等于 1.

由(10.8)不难推出

$$(P_1P_2, P_3P_\infty)=(P_1P_2P_3) \tag{10.9}$$

引理 设两个不同的有穷远点 $A(a)$, $B(b)$被点 $P(a+\lambda b)$所分的单比为 μ, 即$(ABP)=\mu$. 则

$$\mu=-\lambda\frac{b_3}{a_3} \tag{10.10}$$

证明 (1) 如果 P 是 A, B 所在直线上的无穷远点,则

$$a_3+\lambda b_3=0$$

因此

$$-\frac{\lambda b_3}{a_3}=1$$

(2) 如果 P 是有穷远点,则 μ 可由(10.7)式来确定. 设

$$x_1=\frac{a_1}{a_3}, \quad x_2=\frac{b_1}{b_3}, \quad x=\frac{a_1+\lambda b_1}{a_3+\lambda b_3}$$

$$y_1=\frac{a_2}{a_3}, \quad y_2=\frac{b_2}{b_3}, \quad y=\frac{a_2+\lambda b_2}{a_3+\lambda b_3}$$

代入(10.7)得

$$(a_3b_1-a_1b_3)(a_3\mu+b_3\lambda)=0$$

$$(a_3b_2-a_2b_3)(a_3\mu+b_3\lambda)=0$$

如果 $a_3b_1-a_1b_3$ 与 $a_3b_2-a_2b_3$ 都是零，则 x_1, y_1 与 x_2, y_2 顺次相等，两点 A 与 B 必重合，此不可能．因此得

$$a_3\mu+b_3\lambda=0$$

即

$$\mu=-\lambda\frac{b_3}{a_3}$$

定理 10.5 设四个不同的共线点 P_1, P_2, P_3, P_4 的坐标顺次是 $a, b, a+\lambda_1 b, a+\lambda_2 b$．则

$$(P_1P_2, P_3P_4)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\quad \lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0 \qquad (10.11)$$

证明 由(10.10)式有

$$(P_1P_2P_3)=\frac{P_1P_3}{P_2P_3}=-\lambda_1\frac{b_3}{a_3},\quad (P_1P_2P_4)=\frac{P_1P_4}{P_2P_4}=-\lambda_2\frac{b_3}{a_3}$$

由于四点彼此不同，所以 λ_1, λ_2 不能是零或相等．因此

$$(P_1P_2, P_3P_4)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

注意：如果四点 P_1, P_2, P_3, P_4 中 P_1 或 P_2 是无穷远点，则把(10.11)式作为交比的定义．

推论 设四个不同共线点 P_1, P_2, P_3, P_4 的坐标顺次是 $a+\lambda_1 b, a+\lambda_2 b, a+\lambda_3 b, a+\lambda_4 b$．则

$$(P_1P_2, P_3P_4)=\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} \qquad (10.12)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 彼此不相等．

证明 设 $a+\lambda_1 b=a'$，$a+\lambda_2 b=b'$．则

$$a=\frac{a'\lambda_2-b'\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1},\qquad b=\frac{b'-a'}{\lambda_2-\lambda_1}$$

因此四点的坐标是

$$a',\ b',\ \frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_1}a'+\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}b',$$

$$\frac{\lambda_2-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_1}a'+\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}b'$$

即

$$a',\ b',\ a'+\frac{\lambda_3-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_3}b',\ a'+\frac{\lambda_4-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_4}b'$$

由定理 10.5 得到

$$(P_1P_2,P_3P_4)=\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)}$$

定理 10.6 设四个不同的共线点中的三点及其交比 $k(k\neq 0, 1)$为已知，则第四点必唯一确定.

证明 设已知三点的坐标是

$$a+\lambda_1 b,\ a+\lambda_2 b,\ a+\lambda_3 b$$

则由

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)}=k$$

可以求出

$$\lambda_4=\frac{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3)-\lambda_1 k(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_3)-k(\lambda_2-\lambda_3)}$$

因此第四点 $a+\lambda_4 b$ 唯一确定.

例 1 一直线顺次交三点形 $P_1P_2P_3$ 三边 P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 于 Q_1、Q_2、Q_3. 在此三边上顺次取 Q_1', Q_2', Q_3' 使$(P_2P_3, Q_1'Q_1)=k_1$, $(P_3P_1, Q_2'Q_2)=k_2$, $(P_1P_2, Q_3'Q_3)=k_3$.

求证 (1) Q_1', Q_2', Q_3' 共线的充要条件是 $k_1k_2k_3=1$ (图 10-1-1).

(2) P_1Q_1', P_2Q_2', P_3Q_3' 共点的充要条件是 $k_1k_2k_3=-1$(图 10-1-2).

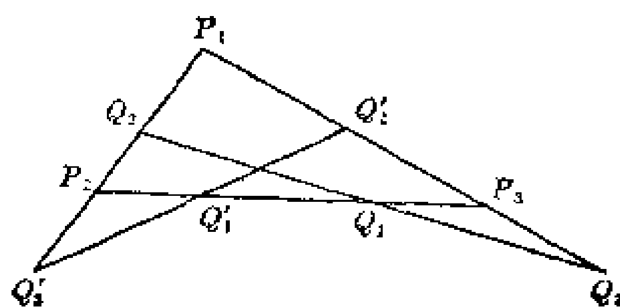


图　10-1-1

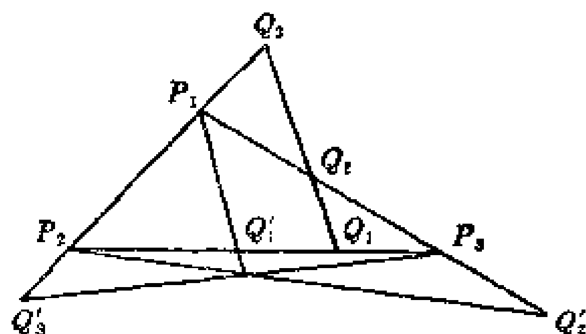


图　10-1-2

证明

设 P_1, P_2, P_3 的坐标分别为 a, b, c. 则由 §6 习题 9 的对偶命题知 Q_1, Q_2, Q_3 的坐标可以分别写为 $qb-rc$, $rc-pa$, $pa-qb$. 由于 Q_1, Q_2, Q_3 与 P_1, P_2, P_3 都不同，所以 p, q, r 都不是零. 因此根据题设知 Q_1', Q_2', Q_3' 的坐标可以分别写为 $qb-k_1rc$, $rc-k_2pa$, $pa-k_3qb$. 并且 $k_1k_2k_3\neq0$.

(1) 三点 Q_1', Q_2', Q_3' 共线的充要条件是有全不为零的三个常数 l, m, n 使

$$l(qb_i-k_1rc_i)+m(rc_i-k_2pa_i)+n(pa_i-k_3qb_i)=0 \quad (i=1,2,3)$$

或

$$(n-k_2m)pa_i+(l-k_3n)qb_i+(m-k_1l)rc_i=0 \quad (i=1,2,3)$$

由于 P_1, P_2, P_3, 不共线且 $pqr\neq0$, 因此有

$$\left.\begin{array}{r} -k_2m+n=0 \\ l-k_3n=0 \\ -k_1l+m=0 \end{array}\right\}$$

又因 l, m, n 不等于零，所以有

$$\begin{vmatrix} 0 & -k_2 & 1 \\ 1 & 0 & -k_3 \\ -k_1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

即

$$k_1k_2k_3=1$$

(2) 令 A_i, B_i, C_i 表示行列式$|abc|$中 a_i, b_i, c_i 的代数余子式，则可以求出 P_1Q_1', P_2Q_2', P_3Q_3' 的线坐标分别是 $qC_i+k_1rB_i$, $rA_i+k_2pC_i$, $pB_i+k_3qA_i$.

三直线 P_1Q_1', P_2Q_2', P_3Q_3' 共点的充要条件是有全不为零的三个常数 l, m, n 使

$$l(qC_i+k_1rB_i)+m(rA_i+k_2pC_i)+n(pB_i+k_3qA_i)=0$$
$$(i=1, 2, 3)$$

或

$$(k_3qn+mr)A_i+(k_1rl+np)B_i+(k_2mp+lq)C_i=0$$
$$(i=1, 2, 3)$$

由于

$$|ABC|=|abc|^2\neq 0$$

因此有

$$\begin{aligned} rm+k_3qn&=0\\ k_1rl\qquad+pn&=0\\ ql+k_2pm\qquad&=0\end{aligned}$$

又因 l, m, n 不等于零，所以有

$$\begin{vmatrix} 0 & r & k_3q\\ k_1r & 0 & p\\ q & k_2p & 0\end{vmatrix}=0.$$

即

$$pqr(k_1k_2k_3+1)=0$$

但是

$$pqr\neq 0$$

所以

$$k_1k_2k_3=-1.$$

例 1 有两个重要的特殊情况.

在(1)中如果 Q_1, Q_2, Q_3 所在直线为无穷远直线，即 Q_1, Q_2, Q_3 都是无穷远点，这时由(10.9)有

$$k_1=(P_2P_3Q_1'),\ k_2=(P_3P_1Q_2'),\ k_3=(P_1P_2Q_3')$$

因此有以下结论.

麦尼劳斯 (Menelaus)定理 在三点形 $P_1P_2P_3$ 的三边 P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 上顺次取三点 Q_1', Q_2', Q_3'，则 Q_1', Q_2', Q_3' 共线的充要条件是

$$\frac{P_2Q_1'}{P_3Q_1'}\cdot\frac{P_3Q_2'}{P_1Q_2'}\cdot\frac{P_1Q_3'}{P_2Q_3'}=1$$

同样，在(2) 中如果 $Q_1, Q_2; Q_3$ 所在的直线为无穷远直线，则又有以下结论.

塞瓦(Ceva)定理 在三点形 $P_1P_2P_3$ 的三边P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 上顺次取三点 Q_1', Q_2', Q_3'，则P_1Q_1', P_2Q_2', P_3Q_3' 共点的充要条件是

$$\frac{P_2Q_1'}{P_3Q_1'}\cdot\frac{P_3Q_2'}{P_1Q_2'}\cdot\frac{P_1Q_3'}{P_2Q_3'}=-1$$

10.3 共线四点的调和比

在共线四点的交比中，交比值为 -1 的情况十分重要，有以下定义.

定义 10.2 如果$(P_1P_2, P_3P_4)=-1$，则称点偶 P_3, P_4 调和分离点偶 P_1, P_2，或称点偶 P_1, P_2与点偶 P_3, P_4 调和共轭，也称 P_4 为 P_1, P_2, P_3 的第四调和点. 交比值 -1 叫做调和比.

显然调和分离或调和共轭的关系是相互的，即与点偶的顺序无关. 又如果四个点的一个交比值为 -1，则根据交比的性质可以求得其他的交比值为 2 或$\frac{1}{2}$. 因此当四个点的一个交比值为 2 或

$\frac{1}{2}$时，只要适当改变点的顺序，就可使其中两点与其他两点调和共轭。

如果$(P_1P_2, P_3P_4)=\frac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)}=-1$，作为特殊情况，我们看到当且仅当$P_3$是线段$P_1P_2$中点时，$P_4$是直线上的无穷远点。因此有以下定理。

定理 10.7 一线段其中点就该线段两端点所定的第四调和点为无穷远点；反过来，成调和共轭的四点，如果有一点为无穷远点，则该点就其余两点所定的第四调和点是其余两点为端点的线段的中点。

例 2 设四点$P_1(3,1)$，$P_2(7,5)$，$Q_1(6,4)$，$Q_2(9,7)$。

求证 $(P_1P_2, Q_1Q_2)=-1$。

证明一 首先知道，P_1，P_2，Q_1，Q_2四点共线。又

$$\frac{P_1Q_1}{P_2Q_1}=\frac{6-3}{6-7}=-3, \quad \frac{P_1Q_2}{P_2Q_2}=\frac{9-3}{9-7}=3.$$

所以

$$(P_1P_2, Q_1Q_2)=\frac{\frac{P_1Q_1}{P_2Q_1}}{\frac{P_1Q_2}{P_2Q_2}}=\frac{-3}{3}=-1$$

证明二 P_1，P_2，Q_1，Q_2的齐次坐标分别为

$$P_1(3,1,1),\quad P_2(7,5,1),\quad Q_1(6,4,1), Q_2(9,7,1)$$

由于P_1，P_2，Q_1，Q_2共线，所以Q_1，Q_2的齐次坐标可由P_1，P_2的齐次坐标线性表示。通过计算可得

$$Q_1(P_1+3P_2),\quad Q_2(P_1-3P_2)$$

因此由定理 10.5 得

$$(P_1P_2, Q_1Q_2)=\frac{3}{-3}=-1$$

10.4 线束的四直线的交比与调和比

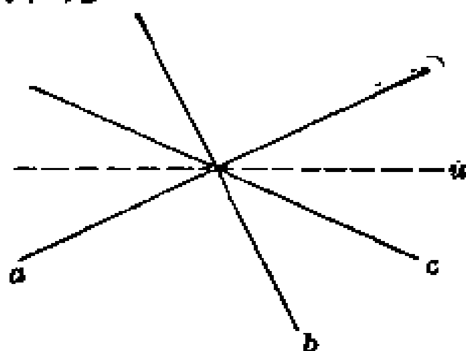


图 10-2

与点列的四点的交比类似，我们可以定义线束中四直线的交比．为此首先说明共点三直线的单比．

设 a, b, c 是线束的三条直线(图 10-2)，通过顶点任作一直线 u，我们规定：两直线 a 与 b 所构成的角是它们所构成的两个角中不含直线 u 的一个．这就明确了角的唯一性．再规定边的顺序与反时针的方向一致时角有正值，与顺时针的方向一致时角有负值．例如在图 10-2 中，$\angle(a, b)$是正的，而$\angle(b, a)$是负的．

定义 10.3 设 a，b，c 是线束 S 的三条直线，则 $(abc)=\frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)}$叫做 a, b, c 三直线的单比，a、b 叫做基线，c 叫做分线，这里(a, c)，(b, c)分别表示 a, b 与 c 构成的角．

如果取定两直线 a，b，则线束 S 中每一条直线 c 对应一个单比(abc)；反过来，每一个单比对应线束 S 中一条直线．

不难看出，如果直线 c 不在角(a, b)中，则单比(abc)为正数；如果直线 c 在角(a, b)中，则单比(abc)为负数．特别是对于角(a, b)的平分线 m，有

$$(abm)=-1$$

类似于点列的四点的交比，利用三条直线的单比可以定义线束里四直线的交比．

定义10.4 设 p_1, p_2, p_3, p_4 是线束的四直线，则

$$(p_1p_2, p_3p_4)=\frac{(p_1p_2p_3)}{(p_1p_2p_4)}=\frac{\sin(p_1, p_3)\sin(p_2, p_4)}{\sin(p_2, p_3)\sin(p_1, p_4)} \quad (10.12)$$

叫做 p_1, p_2, p_3, p_4 的交比，其中 p_1, p_2 叫做基线偶，p_3, p_4 叫做分线偶.

应该注意，四直线的交比值与直线 u 的取法无关. 事实上，四直线的交比是用角的正弦表示的，如果把这些角换为它的邻补角，正弦的绝对值不变，因而交比的绝对值不变. 至于交比的符号，虽然依赖于单比 $(p_1p_2p_3)$ 与 $(p_1p_2p_4)$ 的符号，但是如果 p_3, p_4 属于同一个角(含 u 或不含 u 的角)，则这两个单比的符号相同；如果 p_3, p_4 属于不同的角，则它们的符号相反. 因此交比 (p_1p_2, p_3p_4) 的值与直线 u 的取法无关.

如果线偶 p_3, p_4 不分离线偶 p_1, p_2, 则 $(p_1p_2, p_3p_4)>0$；如果线偶 p_3, p_4 分离线偶 p_1, p_2，则 $(p_1p_2, p_3p_4)<0$.

定理 10.8 如果线束 S 的四直线 a, b, c, d 被任何一条直线 s 截于四点 A, B, C, D, 则

$$(AB, CD)=(ab, cd)$$

证明 用 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ 分别表示线段 SA, SB, SC, SD 的长度，h 表示从点 S 向直线 s 所作的垂线 SH 的长度. ΔABS 的面积可表示为

$$2S_{\Delta ABS}=AB\cdot h$$
$$=\bar{a}\bar{b}\sin(a, b)$$

因此

$$AB=\frac{\bar{a}\bar{b}}{h}\sin(a, b)$$

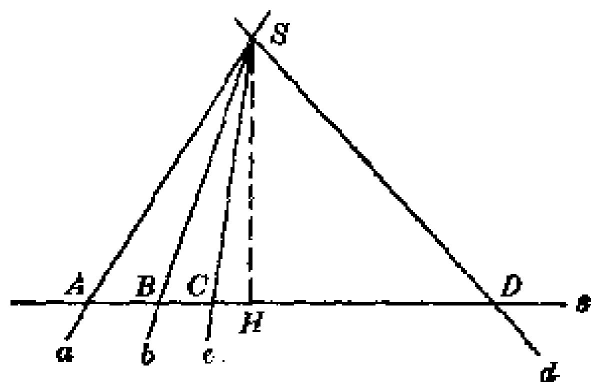


图 10-3

利用这个公式可得：

$$(AB, CD)=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$$

$$=\frac{\overline{ac}\sin(a,c)\cdot\overline{bd}\sin(b,d)}{\overline{bc}\sin(b,c)\cdot\overline{ad}\sin(a,d)}$$

$$=\frac{\sin(a,c)\sin(b,d)}{\sin(b,c)\sin(a,d)}$$

$$=(ab,cd)$$

这个定理是在点 S, A, B, C, D 都是有穷远点的情况下证明的. 读者可以考虑如果 S 为无穷远点或 s 为无穷远直线(A, B, C, D 都是无穷远点)的情况下如何证明.

由这个定理可以推出与关于点列交比性质(定理 10.1—定理 10.4)类似的关于线束交比的性质. 因此也可以推出四条共点直线所构成的 24 个交比值分为六类, 每类的四个交比值相等.

定义 10.5 如果四直线 p_1, p_2, p_3, p_4 满足 $(p_1p_2, p_3p_4)=-1$, 则称线偶 p_3, p_4 调和分离线偶 p_1、p_2 或称线偶 p_1, p_2 与线偶 p_3, p_4 调和共轭, 也称 p_4 为 p_1, p_2, p_3 的第四调和线. 交比值 -1 叫做调和比.

由定理 10.8 还可以推出, 如果两条直线截同一线束, 则所得对应四点的交比相等. 如图 10-4 有 $(AB, CD)=(A'B', C'D')$.

同样, 如果两个线束投射同一点列, 则所得对应四直线的交比相等. 如图 10-5 有 $(ab, cd)=(a'b', c'd')$.

因此得到以下定理.

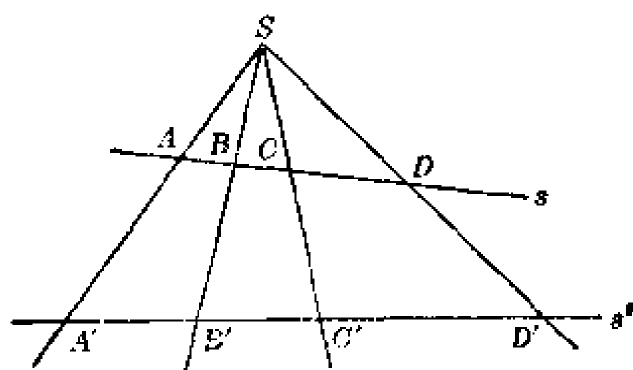


图 10-4

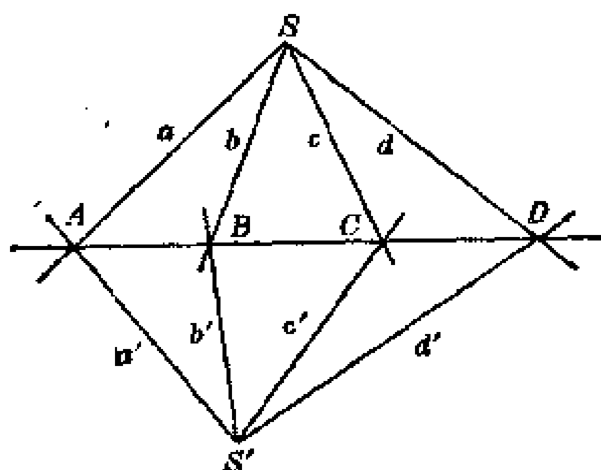


图 10-5

定理 10.9 交比经中心投影后不变，即交比为一射影性质.

关于共点四直线交比的代数表示与共线四点交比的代数表示类似. 我们写出结论，证明从略.

定理 10.10 设 $a, b, a+\lambda_1 b$, $a+\lambda_2 b$ 是四条不同的有穷远共点直线 l_1, l_2, l_3, l_4 的齐次坐标，则

$$(l_1 l_2, l_3 l_4)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0 \qquad (10.13)$$

推论 设 $a+\lambda_1 b$, $a+\lambda_2 b$, $a+\lambda_3 b$, $a+\lambda_4 b$ 是四条不同的有穷远共点直线 l_1, l_2, l_3, l_4 的齐次坐标，则

$$(l_1 l_2, l_3 l_4)=\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} \qquad (10.14)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 彼此不相等.

注意：如果四直线 l_1, l_2, l_3, l_4 中 l_1 或 l_2 是无穷远直线，则把(10.13)式作为交比的定义.

例 3 **求证** 一角的两条边与这个角的内外角平分线调和共轭.

证明一 如图 10-6，角的两边为 a, b, 其内外角平分线分别为 c, d. 因为

$$(ab,\ cd)=\frac{(abc)}{(abd)}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)}}{\dfrac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)}}$$

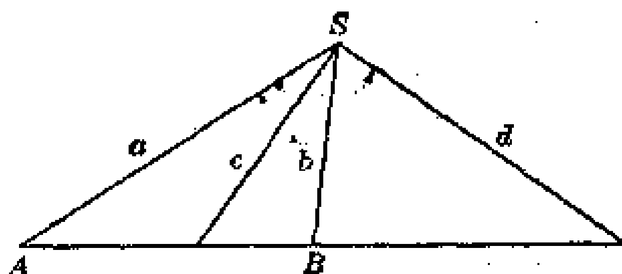


图 10-5

但是

$$\frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)}=-1$$

$$\frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+(a,c)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-(c,b)\right)}=\frac{\cos(a,c)}{\cos(c,b)}=1$$

所以

$$(ab,cd)=\frac{-1}{1}=-1$$

证明二 取原点在三角形 SAB 内部. 设两边 SA, SB 的法式方程为

$$\alpha=0,\ \beta=0$$

则内外角平分线的法式方程分别为

$$\alpha-\beta=0,\ \alpha+\beta=0$$

所以由定理 10.10 得

$$(ab,cd)=-1$$

习 题

1. 设点 P_1, P_2, P_4 的坐标分别为 (1, 1, 1), (1, −1, 1), (1, 0, 1), 且 $(P_1P_2, P_3P_4)=2$, 求 P_3 的坐标.

2. 已知直线 l_1, l_2, l_3, l_4 的方程如下, 求 (l_1l_2, l_3l_4).

(1) $2x-y+1=0$, $3x+y-2=0$, $7x-y=0$, $5x-1=0$;

(2) $x-y=0$, $2x+y=0$, $x+y=0$, $3x-y=0$.

3. 已知直线 l_1, l_3, l_4 的方程分别为

$$2x_1+x_2-x_3=0,\quad x_1-x_2+x_3=0,\quad x_1=0$$

且$(l_1l_2,\ l_3l_4)=-\frac{2}{3}$. 求 l_2 的方程.

4. 设 1, 2, 3, 4, 5, 6 是六个不同的共线点, 求证:

(1) $(12, 34)(12, 45)(12, 53)=1$;

(2) $(12, 34)(12, 56)=(12, 36)(12, 54)$;

(3) 如果$(12, 34)=(23, 41)$, 则$(13, 24)=-1$.

5. 设 P_1, P_2 分别是 x 轴, y 轴上的无穷远点, P_3 是斜率是 1 的方向上的无穷远点, 且$(P_1P_2,\ P_3P_4)=k$, 求 P_4.

6. 设四个不同点 a, b, c, d (不必共线), 另外第五点 r 与之相连得四直线 l_1, l_2, l_3, l_4. 求证:

$$(l_1l_2,\ l_3l_4)=\frac{|car|\,|dbr|}{|cbr|\,|dar|}$$

提示: 用 § 8 习题9.

7. (1) 求证: 两直线 $a_1x^2+2h_1xy+b_1y^2=0$ 调和分离两直线 $a_2x^2+2h_2xy+b_2y^2=0$ 的充要条件是 $a_1b_2+a_2b_1-2h_1h_2=0$.

(2) 求两直线 $ax^2+2hxy+by^2=0$ 所构成角的平分线方程.

提示: 证(1)时注意$\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)}=-1$ 与 $2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_3\lambda_4)=(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_4)$等价并用韦达定理. 用(1)可解(2).

8. 设$(\lambda_1\lambda_2,\ \lambda_3\lambda_4)=-1$, 求证:

$$\frac{2}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}$$

一般地, 如果$(\lambda_1\lambda_2,\ \lambda_3\lambda_4)=k$, 则 $\frac{1-k}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}-\frac{k}{\lambda_3-\lambda_1}$, 其中 $(\lambda_1\lambda_2,\ \lambda_3\lambda_4)$指(10, 12)的$(P_1P_2,\ P_3P_4)$.

9*. 设 OA, OB 是直线 $ax^2+2hxy+by^2=0$, $P(x_1, y_1)$是定点, 通过P的直线交 OA, OB 于 R, S 且P, Q 与 R, S 调和共轭. 求点Q的轨迹(图 10-7).

10*. 设 $p_1\equiv a_1x+b_1y+c_1$, $p_2\equiv a_2x+b_2y+c_2$, $p_3\equiv a_3x+b_3y+c_3$. 求证: 以 $p_1=0$, $p_2=0$, $p_3=0$ 为边的三角形的重心由以下方程给出.

$$(a_2b_3-a_3b_2)p_1=(a_3b_1-a_1b_3)p_2=(a_1b_2-a_2b_1)p_3$$

11*. 设直线 OX 交三角形 ABC 三边 BC, CA, AB 于 A', B', C'(图 10-

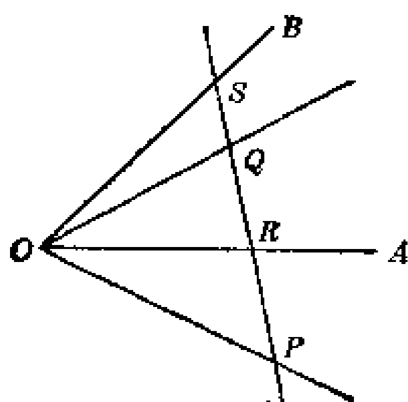


图 10-7

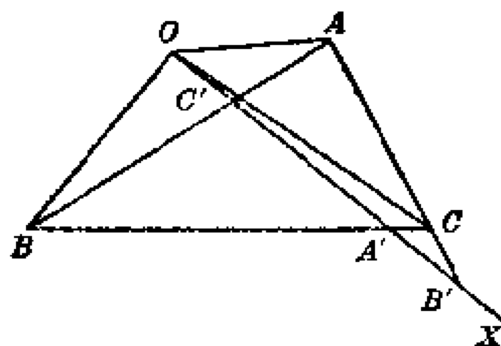


图 10-8

8)，求证：

$$O(AB,CX)=(A'B',C'O)$$

§ 11 完全四点形与完全四线形的调和性

作为调和共轭的重要例证，本节讨论完全四点形与完全四线形的调和性质.

定理 11.1 设 s, s' 是完全四点形 $ABCD$ 的一对对边，它们的交点是对边点 X, X 与其他二对边点的连线是 t, t'，则必有

$$(ss',tt')=-1$$

证明 如图 11-1，令 t 交 AB, CD 于 P, Q.

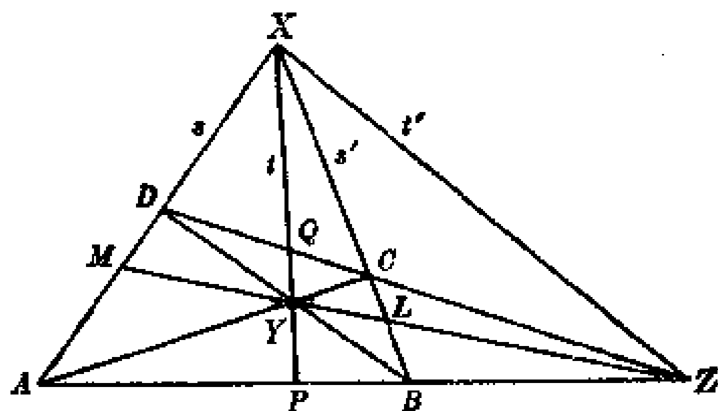


图 11-1

以 X 为投影中心，将四点 A, B, P, Z 投射到直线 CD 上得四点 D, C, Q, Z. 用以下记号表示：

$$(A, B, P, Z) \overset{(X)}{\overline{\wedge}} (D, C, Q, Z)$$

同理

$$(D, C, Q, Z) \overset{(Y)}{\overline{\wedge}} (B, A, P, Z)$$

所以

$$(AB, PZ) = (BA, PZ)$$

但是

$$(BA, PZ) = \frac{1}{(AB, PZ)}$$

所以

$$(AB, PZ)^2 = 1$$

由于

$$(AB, PZ) \neq 1$$

因此

$$(AB, PZ) = -1$$

所以由定理 10.8 得

$$(ss', tt') = -1$$

对于其他两对对边有同样性质，例如对边 AC, BD 与 YX, YZ 调和共轭.

推论 1 在完全四点形的对边三点形的每条边上有一组调和共轭点，其中两个点是对边点，另两个点是这条边与通过第三个对边点的一对对边的交点，如图 11-1 里，$(YZ, LM) = -1$.

推论 2 在完全四点形的每条边上有一组调和共轭点，其中两个点是顶点，另一对点偶里，一个点是对边点，另一个点是这个边与对边三点形的边的交点. 如图 11-1 里，$(AB, PZ) = -1$.

可以对偶地得出完全四线形的调和性质. 即有以下定理.

定理 11.1′ 设 S, S' 是完全四线形 $abcd$ 的一对对顶点，它

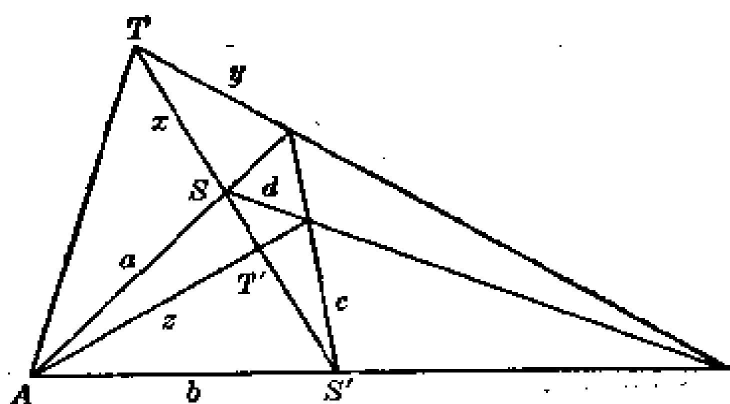


图 11-2

们的连线是对顶线 x, x 与其他二对顶线的交点是 T, T', 则

$$(SS', TT') = -1$$

证明 这个定理可以用综合法与定理 11.1 对偶地证明. 留给读者考虑. 现在对这个定理再给出一个代数法的证明.

由于完全四线形的边 a, b, c, d 无三者共点, 所以根据 § 6 例 2 的对偶, 可以选取它们的方程分别为 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0, \delta=0$, 使得

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \tag{11.1}$$

利用(11.1)式可以得出三条对顶线的方程分别为:

$$x:\ \alpha+\delta=0 \quad 或 \quad \beta+\gamma=0$$

$$y:\ \alpha+\gamma=0 \quad 或 \quad \beta+\delta=0$$

$$z:\ \alpha+\beta=0 \quad 或 \quad \gamma+\delta=0$$

理由是, 例如, 因为 $\alpha+\delta\equiv\beta+\gamma$, 所以方程 $\alpha+\delta=0$ 与 $\beta+\gamma=0$ 表示同一直线, 此直线显然是 x.

现在看通过顶点 A 的三条直线 AS, AS', AT', 它们的方程分别为 $\alpha=0, \beta=0, \alpha+\beta=0$, 如能证明 AT 的方程为 $\alpha-\beta=0$, 定理即得证.

$\alpha-\beta=0$ 所表示的直线通过点 A, 又因为 $\alpha-\beta=(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)$, 所以 $\alpha-\beta=0$ 所表示的直线通过 x 与 y 的交点, 即通过点 T. 因此 $\alpha-\beta=0$ 是 AT 的方程. 所以

$$A(SS', TT') = -1, (SS', TT') = -1$$

与定理 1, 2 对偶有推论1′, 2′(习题 1).

根据完全四点形的调和性质，可以解决“已知共线三点，求作第四调和点”的作图方法.

设已知直线上三点 1, 2, 3.

求作点 4, 使$(12, 34) = -1$.

解 如图 11-3, 过 1, 2 各任作一直线交于点 A, 在 $2A$ 上任取一点 B, 连结 B, 3 交 $1A$ 于点 C, 再连结 2 与 C, 1 与 B. 这两个连线交于点 D. 连结 A, D 与已知直线交于点 4, 就是所求的点.

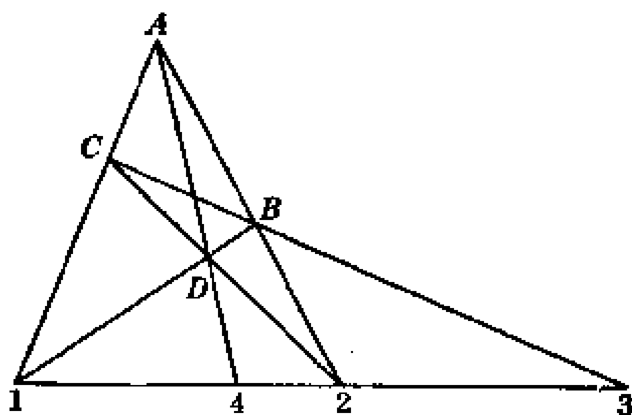


图 11-3

这个作图告诉我们，如果点偶 P_1, P_2 与Q_1, Q_2 调和共轭，则存在一个完全四点形 $ABCD$，两对对边分别交于 P_1, P_2，另一对对边分别通过 Q_1, Q_2；反过来，两对点偶对于一个完全四点形有以上这种关系时，必成调和共轭. 因此我们可以说，一直线 l 上的点偶P_1, P_2 与 Q_1, Q_2 成为调和共轭的充要条件是：P_1, P_2 是一个完全四点形的对边点，Q_1, Q_2 是通过第三个对边点的两条对边与 l 的交点.

注意：上述的充要条件可以作为调和共轭点偶的定义，这是综合地纯射影的定义. 当然，在这种定义里，P_1, P_2 与 Q_1, Q_2 调和共轭和 Q_1, Q_2 与 P_1, P_2 调和共轭的意义不同，需要证明调和共轭

点偶的平等性。

习　题

1. 写出推论 1′ 与 2′。

2. 与定理 11.1 对偶地证明定理 11.1′。

3. 与定理 11.1′ 对偶地证明定理 11.1.

4. 设 XYZ 是完全四点形 $ABCD$ 的对边三点形, XZ 分别交 AC, BD 于 L, M, 不用笛沙格定理证明 YZ, BL, CM 共点(图 11-4).

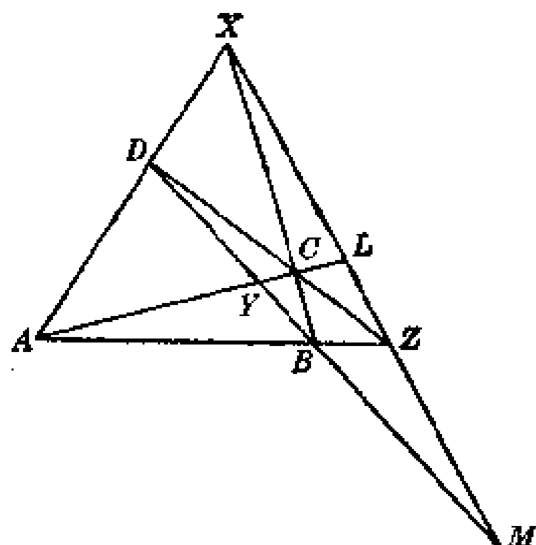


图 11-4

5. (1) 设 A, B, C 是完全四线形的三个共线顶点, 点偶 A, B 与 M, C 调和共轭。

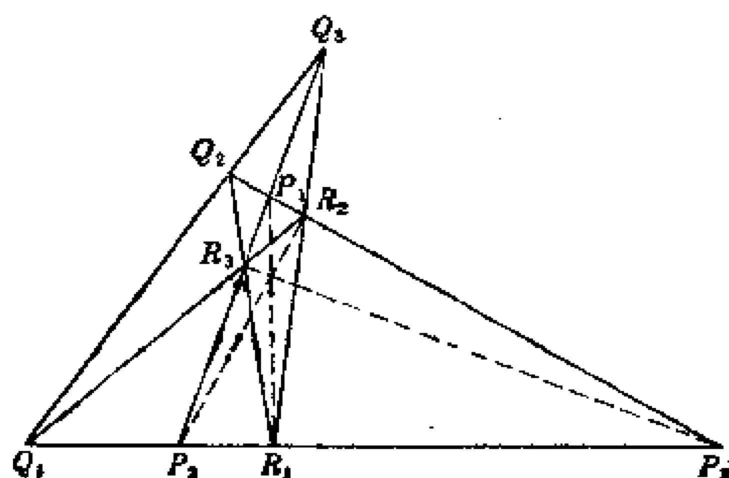


图 11-5

求证: 通过 A, B 的对顶线的交点在 M 与 C 的对顶点的连线上。

(2) 写出(1)的对偶命题.

6. (1) 设有三点形 $P_1P_2P_3$, Q_1, Q_2, Q_3 为共线三点分别位于三边上. 又 R_1, Q_1 与 P_2, P_3 调和共轭, R_2, Q_2 与 P_3, P_1 调和共轭, R_3, Q_3 与 P_1, P_2 调和共轭(图 11-5)。

求证: P_1R_1, P_2R_2, P_3R_3 共点。

(这个命题可以看成是命题"三角形三中线共点"的射影推广.)

(2) 写出(1)的对偶命题并说明它与逆命题的关系.

§ 12 一维基本形的射影对应

本节讨论点列与点列之间或线束与线束之间的射影对应与透视对应以及它们之间的关系.

12.1 透视对应与射影对应

定义 12.1 如果一个点列与一个线束的元素之间建立了一一对应且对应元素是结合的,则这个对应叫做透视对应,点列与线束叫做透视的.

如图 10-3, 点列 $s(A, B, C, \cdots)$与线束 $S(a, b, c, \cdots)$是透视的,记以

$$s(A, B, C, \cdots)\overline{\wedge}S(a, b, c, \cdots)$$

显然,点列与线束的透视关系具有对称性

定义 12.2 如图 10-4, 点列 s 与 s' 的对应点连线交于一点 S, 也就是这两个点列与同一线束 S 透视, 则这两个点列叫做透视点列, 点 S 叫做透视中心, 记以

$$s(A, B, C, \cdots) \overset{(S)}{\overline{\wedge}} s'(A', B', C', \cdots)$$

定义 12.2′ 如图 10-5, 线束 S 与 S' 的对应直线的交点在一直线 s 上, 也就是这两个线束与同一点列透视, 则这两个线束叫做透视线束. 直线 s 叫做透视轴. 记以

$$S(a, b, c, \cdots) \overset{(s)}{\overline{\wedge}} S'(a', b', c', \cdots)$$

显然点列与点列或线束与线束的透视关系都具有对称性, 又根据定理 10.9 知交比在透视对应下不变.

思考：点列与点列（线束与线束）的透视关系是否具有传递性？

在第一章§3里，我们通过连续进行透视仿射对应构成了仿射对应．关于射影对应，有各种不同的定义方法．就直观上来说，连续进行透视对应就构成射影对应．这就是彭赛列（Poncelet）关于射影对应的定义．

定义 12.3 设有两个一维基本形（点列或线束）$[\pi]$与$[\pi']$，如果存在 n 个一维基本形$[\pi_1]$，$[\pi_2]$，…，$[\pi_n]$．使得

$$[\pi]\overline{\wedge}[\pi_1]\overline{\wedge}[\pi_2]\overline{\wedge}\cdots\overline{\wedge}[\pi_n]\overline{\wedge}[\pi']$$

则把$[\pi]$与$[\pi']$之间的对应叫做射影对应．记以$[\pi]\wedge[\pi']$．这 $n+1$ 次透视对应则形成透视对应链．

如图 12-1，

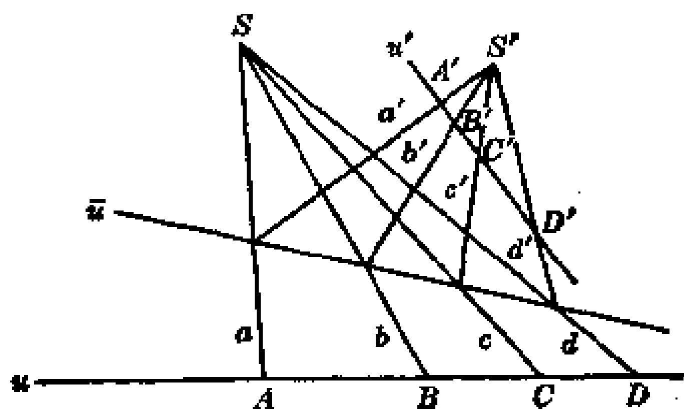


图 12-1

$$u(A,B,C\cdots)\overline{\wedge}S(a,b,c,\cdots)\overset{(\bar{u})}{\overline{\wedge}}$$
$$S'(a',b',c',\cdots)\overline{\wedge}u'(A',B',C',\cdots)$$

所以有

$$u(A,B,C,\cdots)\wedge u'(A',B',C',\cdots)$$

由定义 12.3 可以看到两个一维基本形之间的射影对应必是一一对应，且有以下性质：

(1) $[\pi]\wedge[\pi]$．

(2) 如果$[\pi]\barwedge[\pi']$，则$[\pi']\barwedge[\pi]$.

(3) 如果$[\pi]\barwedge[\pi']$，且$[\pi']\barwedge[\pi'']$，则$[\pi]\barwedge[\pi'']$.

这就是说，关系“$\barwedge$”是一种等价关系.

(4) 如果$[\pi]\doublebarwedge[\pi']$则$[\pi]\barwedge[\pi']$. 但是反过来不成立. 以后将说明射影对应成为透视对应的条件.

定理 12.1 两个点列间的一一对应是射影对应的充要条件是任何四点的交比与其对应四点的交比相等.

证明 设 f 为以直线 l, l' 为底的点列间的一一对应：

$$f(P)=P'$$

定理中条件的必要性是显然的，下面证明充分性.

设 l 上三点 P_0, P_1, P_2 且 $f(P_0)=P_0'$, $f(P_1)=P_1'$, $f(P_2)=P_2'$.

通过 P_0' 作直线 m，在直线 P_0P_0' 上取另一点 S，以 S 为投影中心将 P_1, P_2 投射到 m 上得 Q_1、Q_2，作直线 $P_1'Q_1$ 与 $P_2'Q_2$，它们相交于S'.

对于 l 上任何点 P_α，以 S 为投影中心将 P_α 投射到 m 上得 Q_α，再以 S' 为投影中心将 Q_α 投射到 l' 上得 $P'_{\alpha'}$，如图 12-2 有

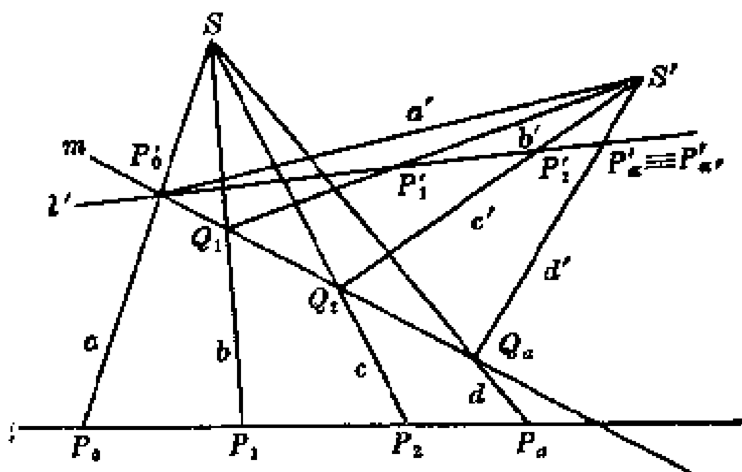


图 12-2

$$l(P_0, P_1, P_2, P_\alpha)\doublebarwedge S(a, b, c, d)\doublebarwedge m(P_0', Q_1, Q_2, Q_\alpha)$$
$$\doublebarwedge S'(a', b', c', d')\doublebarwedge l'(P_0', P_1', P_2', P'_{\alpha'})$$

因此

$$(P_0P_1, P_2P_\alpha)=(P_0'P_1', P_2'P_{\alpha'}')$$

设 $f(P_\alpha)=P_\alpha'$，则

$$(P_0P_1, P_2P_\alpha)=(P_0'P_1', P_2'P_\alpha')$$

所以 P_α' 与 $P_{\alpha'}'$ 重合. 因此

$$l(P_0, P_1, P_2, P_\alpha, \cdots)\overline{\wedge}\, l'(P_0', P_1', P_2', P_\alpha', \cdots)$$

由于 P_α 为任何点，故充分性得证.

定理 12.1 说明可以用交比不变作为射影对应的定义，这就是下面的斯泰因纳(Steiner)关于射影对应的定义.

定义 12.4 设两个一维基本形$[\pi]$与$[\pi']$(点列或线束)元素间的一个一一对应使得任何四个元素的交比等于它们四个对应元素的交比，则此对应叫做$[\pi]$与$[\pi']$之间的射影对应，记作

$$[\pi]\overline{\wedge}[\pi']$$

由定义 12.4 也可以看到"$\overline{\wedge}$"是一种等价关系.

又由定理 12.1 可得以下定理.

定理 12.2 已知两个点列间的三对对应点，则可以决定唯一一个射影对应. 即射影对应被其三对对应点所唯一确定.

关于线束有与定理 12.1，定理 12.2 相对偶的定理，请读者写出，并考虑其证明.

下面讨论射影对应成为透视的条件.

设点列 l 与 l' 间的射影对应是透视对应，S 为透视中心，X 为两底 l 与 l' 的交点. 因为直线 SX 与两底交于同一点 X，所以点 X 自对应.

反过来，设点列 l 与 l' 间的射影对应 f，

$$f(P)=P'$$

而使 l 与 l' 的交点 X 作为 l 的点与它在 l' 上的对应点 X' 重合，即

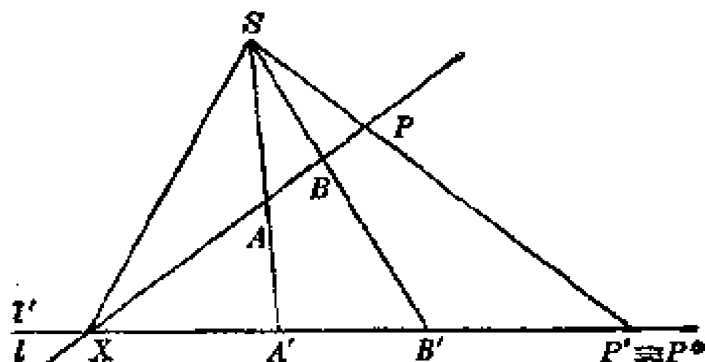


图 12-3

$$f(X)=X$$

在 l 上任取两点 A, B, 设其对应点为 $A'=f(A), B'=f(B)$. 令 AA' 与 BB' 交于点 S, SP 与 l' 交于点 P^*.

设对应 $\varphi(P)=P^*$ 是以 S 为透视中心的点列 $l(P)$ 到 $l'(P')$ 的透视对应, 则对应 φ 是射影的.

但是在 φ 之下, 三点 A, B, X 分别对应 A', B', X. 于是对应 f 与 φ 有三对对应点相同. 所以由定理 12.2 知 $f=\varphi$, 即 P' 与 P^* 重合, 因此 f 是透视对应(以 S 为透视中心).

综上所述, 得到以下定理.

定理 12.3 两个点列间的射影对应是透视对应的充要条件是它们底的交点自对应.

对偶地有

定理 12.3′ 两个线束间的射影对应是透视对应的充要条件是它们顶点的连线自对应.

例 1 证明巴卜斯命题(见 §8 习题 3).

设 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 为同一平面内两直线上的两组共线点, B_1C_2 与 B_2C_1 交于 L, C_1A_2 与 C_2A_1 交于 M, A_1B_2 与 A_2B_1 交于 N(图 12-4).

则三点 L, M, N 必共线.

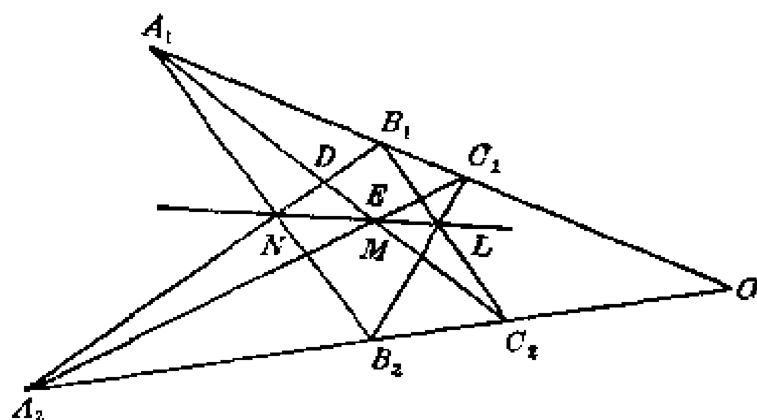


图 12-4

证明：如图 12-4,

$$(B_1, D, N, A_2) \overset{(A_1)}{\barwedge} (O, C_2, B_3, A_2) \overset{(C_1)}{\barwedge} (B_1, C_2, L, E)$$

所以

$$(B_1, D, N, A_2) \barwedge (B_1, C_2, L, E)$$

但是在这个射影对应中，二点列底的交点 B_1 自对应．所以由定理 12.3 有

$$(B_1, D, N, A_2) \overset{-}{\barwedge} (B_1, C_2, L, E)$$

因此，DC_2, NL, A_2E 三直线共点．即 L, M, N 共线．

思考：巴卜斯命题的对偶命题．

12.2 点列间射影对应的代数表示

设两直线 l 与 l' 上由三对对应点 $P_i \to P_i'$ $(i=1, 2, 3)$ 建立了一个射影对应．则由定义 12.4，对于任何一对对应点 $P \to P'$ 有

$$(P_1P_2, P_3P) = (P_1'P_2', P_3'P') \tag{12.1}$$

在 l 与 l' 上分别引入一维笛氏齐次坐标．设 P_1, P_2, P_3, P 的坐标分别为

$$(a_1, a_2), (b_1, b_2), (a_1+\lambda_3 b_1, a_2+\lambda_3 b_2), (a_1+\lambda b_1, a_2+\lambda b_2)$$

且 P_1', P_2', P_3' 与 P' 的坐标分别为

$(a_1', a_2'), (b_1', b_2'), (a_1'+\lambda_0' b_1', a_2'+\lambda_0' b_2'), (a_1'+\lambda' b_1', a_2'+\lambda' b_2')$

根据定理 10.5，有

$$\frac{\lambda_0}{\lambda}=\frac{\lambda_0'}{\lambda'} \tag{12.2}$$

如果用(x_1, x_2)，(x_1', x_2')分别表示点 P, P' 的齐次坐标，则

$$\frac{x_1}{a_1+\lambda b_1}=\frac{x_2}{a_2+\lambda b_2}$$

所以

$$\lambda=\frac{a_2x_1-a_1x_2}{-b_2x_1+b_1x_2}$$

同理

$$\lambda'=\frac{a_2'x_1'-a_1'x_2'}{-b_2'x_1+b_1'x_2'}$$

将 λ, λ' 代入(12.2)，得

$$\frac{\lambda_0(-b_2x_1+b_1x_2)}{a_2x_1-a_1x_2}=\frac{\lambda_0'(-b_2'x_1'+b_1'x_2')}{a_2'x_1'-a_1'x_2'}$$

所以

$$\begin{cases}\lambda_0(-b_2x_1+b_1x_2)=\rho\lambda_0'(-b_2'x_1'+b_1'x_2')\\ a_2x_1-a_1x_2=\rho(a_2'x_1'-a_1'x_2')\end{cases}$$

其中 ρ 为比例常数.

解出 x_1', x_2'，得射影对应式的通形

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{cases} \tag{12.3}$$

其中 $\rho\neq 0, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 都是常数，并且行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$$

(否则 l 上的点都对应 l' 上一个定点，因此不是一一对应，所以不可能).

如果仅讨论两直线上的有穷远点，则可把(12.3)中点 P 与 P'

的齐次坐标化为非齐次坐标，而得

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}} \tag{12.4}$$

形如(12.3)或(12.4)且系数行列式不等于零的对应叫做非奇线性对应．因此得到以下定理．

定理 12.4 两直线上各建立笛氏坐标系，则以此两直线为底的点列间射影对应必是非奇线性对应．

这个定理的逆定理也成立，即有

定理 12.5 两直线上各建立笛氏坐标系，则以此两直线为底的点列间的非奇线性对应必是射影对应．

证明 (1) 设有非奇线性对应(12.3)，则对于 l 上的一个确定的点 $P(x_1, x_2)$，由(12.3)必能确定两个不全为零的数 $(\rho x_1', \rho x_2')$．(否则，由于 $D\neq 0$，由

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

将推出 $x_1 = x_2 = 0$，这是不可能的．) 因此点 P 在 l' 上有唯一确定的象．

由于 $D\neq 0$，由(12.3)可求出其逆

$$\begin{cases} \sigma x_1 = A_{11}x_1' + A_{21}x_2' \\ \sigma x_2 = A_{12}x_1' + A_{22}x_2' \end{cases} \tag{12.5}$$

其中 $\sigma = \frac{D}{\rho}$，A_{ij} 是 a_{ij} 在 D 中的代数余子式，因此 l' 上的一点在 l 上有唯一确定的原象．于是推得 l 上的点与 l' 上的点通过(12.3)建立了一一对应．

(2) 设 l 上四点 P_1, P_2, P_3, P 通过(12.3)对应于 l' 上的四点 P_1', P_2', P_3', P'．它们的坐标与证明定理 12.4 时所用的符号相同．

由前三对对应点的第一坐标得

$$\rho_1 a_1' = a_{11}a_1 + a_{12}a_2$$

$$\rho_2 b_1' = a_{11} b_1 + a_{12} b_2$$

$$\rho_3(a_1' + \lambda_0' b_1') = a_{11}(a_1 + \lambda_0 b_1) + a_{12}(a_2 + \lambda_0 b_2)$$

把前两式代入第三式并进行整理得:

$$(\rho_3 - \rho_1) a_1' = (\lambda_0 \rho_2 - \lambda_0' \rho_3) b_1'$$

同样由前三对对应点的第二坐标得

$$(\rho_3 - \rho_1) a_2' = (\lambda_0 \rho_2 - \lambda_0' \rho_3) b_2'$$

由于 P_1' 与 P_2' 不同,必有

$$\begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

因此

$$\rho_3 - \rho_1 = 0, \quad \lambda_0 \rho_2 - \lambda_0' \rho_3 = 0$$

于是

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_0'} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

再考察第一、二与第四对对应点,同理可得

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

所以根据定理 10.5 得

$$(P_1 P_2, P_3 P) = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\lambda_0'}{\lambda'} = (P_1' P_2', P_3' P')$$

由(1),(2)根据定义 12.4 知非奇线性对应(12.3)为射影对应.

例 2 求射影对应式,使直线 l 上以 2, 4 为坐标的点及无穷远点顺次对应直线 l' 上以 $-1, 1$ 为坐标的点及无穷远点.

解 设射影对应式为

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \rho x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

由于无穷远点对应无穷远点,必有

$$a_{21}=0$$

又由于坐标为(2, 1), (4, 1)的点对应坐标为(−1, 1), (1, 1)的点，必有

$$\begin{cases}-\rho_1=2a_{11}+a_{12}\\ \rho_1=2a_{21}+a_{22},\end{cases}\qquad \begin{cases}\rho_2=4a_{11}+a_{12}\\ \rho_2=4a_{21}+a_{22}\end{cases}$$

因此所求的对应式为

$$\begin{cases}\rho x_1'=x_1-3x_2\\ \rho x_2'=\qquad x_2\end{cases}$$

非齐次式为

$$x'=x-3$$

习　题

1. 求射影对应式，使直线 l 上坐标是 0, 1, 2 的三点顺次对应直线 l' 上坐标是 −1, 0, −2 的三点. 将对应式写为齐次坐标与非齐次坐标两种形式并求出每条直线上无穷远点的对应点.

2. 求射影对应式，使直线 l 上坐标是 1, 2, 3 的三点对应直线 l' 上的三点，其坐标为：

(1) 4, 3, 2; (2) −1, −2, −3; (3) 1, 2, 3.

3. 如果射影对应使无穷远点对应无穷远点. 求证：这个射影对应使二点列的底 l 与 l' 具有以下性质：

l 上任何线段的长度与 l' 上对应线段的长度成定比.

4. 设 $(AB, CD)=-\frac{1}{3}$, B 是线段 AD 内偏于 A 的三等分点，求作点 C.

5. 在四边形 $ABCD$ 的两边 AD 与 BC 上各取一点 E 与 F 使 $AE:BF=AD:BC$. 求证：直线 AF 与 BE 的交点的轨迹是一条直线.

6. 如果三角形 ABC 的边 BC, CA, AB 分别通过在同一直线的三点 P, Q, R, 又顶点 B, C 各在一条定直线上. 求证：顶点 A 也在一条定直线上.

7*. 如果点列 $(P)\barwedge(P')$, l 与 l' 交点为 O. 求证：P_rP_s' 与 P_sP_r' 的交点 X 的轨迹是一直线. 问：本题的对偶命题如何？

§13 一维射影变换

平面内的一维基本形包括点列与线束，如果两个同类的基本形(同为点列或线束)，是同底的或同中心的，则叫做重叠的基本形．两个重叠的一维基本形的射影对应，也就是一个一维基本形到自身的射影对应．这种射影对应叫做射影变换．

显然定理12.1与定理12.2对点列的射影变换的情况仍成立；(12.3)与(12.4)二式是点列的射影变换的代数表示式．不过，这时(x_1, x_2)与(x_1', x_2')或(x)与(x')是对同一坐标系的坐标．

一维基本形的射影变换的不变元素(即二重元素或称自对应元素)的个数不能大于2，也就是说，如果一个一维基本形的射影变换存在三个自对应元素，则这个变换一定是恒等变换．

本节要说明射影变换的另一种表示法，即参数表示法．

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}, \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

可以写为

$$a_{21}xx' + a_{22}x' = a_{11}x + a_{12}$$

令

$$a_{21} = \alpha, -a_{11} = \beta, a_{22} = \gamma, -a_{12} = \delta$$

则得

$$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \tag{13.1}$$

(13.1)式叫做x, x'的双线性方程，其中x, x'表示笛氏坐标．

设有两个重叠一维基本形(同为点列或线束) $A+\lambda B$与$A+\lambda' B$之间的一个射影对应，它是由三对对应元素$A+\lambda_i B \to A+\lambda_i' B (i=1,2,3)$所决定的．则由定理10.5的推论知，对于任何第四对对应元素$A+\lambda_4 B \to A+\lambda_4' B$有：

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)} = \frac{(\lambda_1'-\lambda_3')(\lambda_2'-\lambda_4')}{(\lambda_2'-\lambda_3')(\lambda_1'-\lambda_4')}$$

因此 λ 与 λ' 之间的关系为

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0 \tag{13.2}$$

其中 a、b、c、d 为常数且 $ad-bc\neq 0$. 即为 λ, λ' 的双线性方程.

反过来,如果 λ 与 λ' 满足双线性方程. 即

$$a\lambda\lambda' + b\lambda + c\lambda' + d = 0 \qquad (ad-bc\neq 0)$$

则有

$$\lambda_1' - \lambda_3' = -\frac{b\lambda_1 + d}{a\lambda_1 + c} + \frac{b\lambda_3 + d}{a\lambda_3 + c} = \frac{(ad-bc)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a\lambda_1 + c)(a\lambda_3 + c)}$$

同样可以计算 $\lambda_2'-\lambda_4'$、$\lambda_2'-\lambda_3'$,$\lambda_1'-\lambda_4'$. 因此可以得到

$$\frac{(\lambda_1' - \lambda_3')(\lambda_2' - \lambda_4')}{(\lambda_2' - \lambda_3')(\lambda_1' - \lambda_4')} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}$$

这就是说, 任何四点的交比等于其对应四点的交比. 所以由 $A+\lambda B \rightarrow A+\lambda' B$ 决定的对应是射影对应.

综上所述, 两个重叠一维基本形 $A+\lambda B$ 与 $A+\lambda' B$ 之间射影对应可以定义为任何元素的参数 λ 与其对应元素的参数 λ' 之间满足双线性方程.

对于自对应元素 $A+\lambda B$, 它的象仍为 $A+\lambda B$, 所以 λ 满足方程

$$a\lambda^2 + (b+c)\lambda + d = 0 \tag{13.3}$$

(13.3)是 λ 的二次方程,因此有两个根 λ_1, λ_2. 由每一个根得到一个自对应元素.

如果 λ_1 与 λ_2 为不等的实数,则有两个自对应元素, 这种射影变换叫做双曲型的;

如果 λ_1 与 λ_2 为相等的实数,则有一个自对应元素, 这种射影变换叫做抛物型的;

如果 λ_1 与 λ_2 为虚数,则没有实的自对应元素,这种射影变换叫做椭圆型的.

例 设P与P'是一维基本形射影变换的对应元素，E, F是两个不同的自对应元素.

求证 (PP', EF)为常数.

证明 令Q, Q'为另一对对应元素，则

$$(PQ, EF) = (P'Q', EF)$$

如果$P, P'; Q, Q'; E, F$的参数分别为$x, x'; y, y'; \lambda_1, \lambda_2$. 则

$$\frac{(x-\lambda_1)}{(x-\lambda_2)}\frac{(y-\lambda_2)}{(y-\lambda_1)} = \frac{(x'-\lambda_1)}{(x'-\lambda_2)}\frac{(y'-\lambda_2)}{(y'-\lambda_1)}$$

或

$$\frac{(x-\lambda_1)(x'-\lambda_2)}{(x-\lambda_2)(x'-\lambda_1)} = \frac{(y-\lambda_1)(y'-\lambda_2)}{(y-\lambda_2)(y'-\lambda_1)}$$

即

$$(PP', EF) = (QQ', EF)$$

注意：以上的讨论是对重叠的一维基本形说的. 可以证明，对于非重叠的两个一维基本形$A+\lambda B$与$A'+\lambda' B'$成为射影对应的充要条件也是λ与λ'满足一个双线性方程.

习　　题

1. 求以下重叠一维基本形的射影变换自对应元素的参数：

(1) $\lambda\lambda'+6\lambda+\lambda'+6=0$;

(2) $\lambda\lambda'-2\lambda+1=0$;

(3) $2\lambda+\lambda'+1=0$.

2. 设$A_1A_2A_3$为坐标三点形，$O(1, 1, 1)$、A_2O交A_1A_3于点A，P是A_2A_3上的动点，PO交A_1A_2于Q，QA交A_2A_3于点P'. 如果P, P'的坐标分别为$(0, \lambda, 1)$，$(0, \lambda', 1)$. 求射影变换$(P)\barwedge(P')$的方程与自对应点.

3. 设A, B, C是不同的共线点，在射影变换$(P)\barwedge(P')$中，A, B, C分别对应B, C, A. 求证：$(P)\barwedge(P')$有两个不同的自对应点.

4. 设射影变换为抛物型的，自对应元素的参数为α. 求证：$\frac{1}{\lambda-\alpha}-$

$\frac{1}{\lambda'-\alpha}$=常数.

5. 设 P, P'; Q, Q' 是射影变换的两对对应点. E 是自对应点, V, V' 是通过 E 的直线上的任何两点. PV, $P'V'$ 交于 P'', QV, $Q'V'$ 交于 Q''. 点列的底为 l. 求证: $P''Q''$ 与 l 的交点是另一个自对应点.

6. 设 A, B, C 是不同的共线点且有

$$(A, B, C, P, Q, R)\barwedge(B, C, A, Q, R, X)$$

求证: X 与 P 重合.

提示: 用第 3 题.

7. 设点列的射影变换是抛物型的. E 是自对应点, $P\longrightarrow P'$ 是一对对应点. 另外, 当 P' 看作第一点列的点时, $P'\longrightarrow R$. 求证: $(EP', PR)=-1$.

§ 14 一维基本形的对合

本节讨论射影变换的一种特殊情况——对合.

定义 14.1 在两个重叠而且射影对应的一维基本形里, 如果对于任何元素, 无论看作属于第一基本形或第二基本形, 它的对应元素是一样的, 那末这种非恒等的射影变换叫做对合(对应).

定义 14.1 就是说, 在对合里每对对应元素的每个元素归入哪个基本形都可以. 例如, 在直线 l 上取定 O 点, 对于 l 上任何点 P_i, 取 P_i 关于 O 的对称点 P_i' 为 P_i 的对应点 (图 14-1). 则显然 $(P_i)\barwedge(P_i')$ 并且这个射影变换是一个对合. 点 O 与无穷远点是两个自对应点.

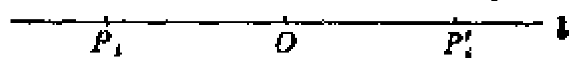


图 14-1

下面讨论射影变换成为对合的条件. 不妨假定所讨论的基本形是两个重叠点列.

先把点 P 作为第一点列的点, 记为 P_1, P_1 在第二点列的对应点记为 P_1'. 再把点 P 作为第二点列的点, 记为 P_2', P_2' 在第一点列

的对应点记为 P_2. 在一般射影变换下, P_1' 与 P_2 不同. 现在假设是对合对应,则 P_1' 与 P_2 重合.

令 P_1 的参数为 p, P_1' 的参数为 q'. 因 P_1 与 P_1' 是射影对应里的对应点,所以 p 与 q' 满足方程

$$apq'+bp+cq'+d=0(ad-bc\neq 0) \tag{14.1}$$

当 P 作为 P_2' 时,它的参数仍为 p, 如果对应点 P_2 的参数为 q, 则同样 q 与 p 满足方程

$$aqp+bq+cp+d=0 \qquad (ad-bc\neq 0) \tag{14.2}$$

但是在我们的假设之下, P_1' 与 P_2 重合. 所以 $q'=q$. 因此 (14.1) 式变为

$$apq+bp+cq+d=0 \tag{14.3}$$

(14.3)式与(14.2)式相减, 得到

$$(b-c)(p-q)=0$$

由于

$$p\neq q$$

所以

$$b=c$$

因此在对合的情况下, 对应点的参数 λ 与 λ' 所满足的方程为

$$a\lambda\lambda'+b(\lambda+\lambda')+d=0 \qquad (ad-b^2\neq 0) \tag{14.4}$$

反过来, 设(14.4)成立. P 为第一点列的点, 参数为 p. 其对应点参数为 q', 则有

$$apq'+b(p+q')+d=0 \tag{14.5}$$

再把 P 作为第二点列的点, 其对应点参数为 q, 则有

$$apq+b(p+q)+d=0. \tag{14.6}$$

(14.6)式与(14.5)式相减, 得到

$$(ap+b)(q-q')=0$$

但是

$$ap+b\neq 0$$

所以

$$q=q'$$

这表示无论将P作为属于哪个点列，其对应点一致．因此两点列成为对合对应．

综上所述，得到以下定理．

定理 14.1 两个重叠点列 $A+\lambda B$，$A+\lambda' B$ 成为对合对应的充要条件是对应点的参数 λ 与 λ' 满足以下方程：

$$a\lambda\lambda'+b(\lambda+\lambda')+d=0 \qquad (ad-b^2\neq 0) \tag{14.7}$$

我们知道，三对对应元素决定唯一一个射影变换．如果是对合，则有以下定理．

定理 14.2 不重合的两对对应点决定唯一一个对合对应．

证明 设两对对应点 P 与 P'，Q 与 Q'，其参数为 p 与 p'，q 与 q'，满足对合方程

$$a\lambda\lambda'+b(\lambda+\lambda')+d=0 \qquad (ad-b^2\neq 0)$$

则有

$$app'+b(p+p')+d=0$$
$$aqq'+b(q+q')+d=0$$

所以

$$a:b:d=\begin{vmatrix} p+p' & 1 \\ q+q' & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & pp' \\ 1 & qq' \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} pp' & p+p' \\ qq' & q+q' \end{vmatrix}$$

设

$$\begin{vmatrix} p+p' & 1 \\ q+q' & 1 \end{vmatrix}=A, \qquad \begin{vmatrix} 1 & pp' \\ 1 & qq' \end{vmatrix}=B, \qquad \begin{vmatrix} pp' & p+p' \\ qq' & q+q' \end{vmatrix}=D$$

因此得到由两对对应点 P、P'，Q、Q' 所决定的对合方程

$$A\lambda\lambda'+B(\lambda+\lambda')+D=0$$

由于

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{d}{D}$$

令这个公比为 ρ，则有

$$ad-b^2=\rho^2(AD-B^2)$$

因为

$$ad-b^2\neq 0$$

所以

$$AD-B^2\neq 0$$

推论 在同一对应下，三对对应点 P_i，P_i' $(i=1,2,3)$ 成为对合对应的充要条件是

$$\begin{vmatrix} p_1p_1' & p_1+p_1' & 1 \\ p_2p_2' & p_2+p_2' & 1 \\ p_3p_3' & p_3+p_3' & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (14.8)$$

其中 p_i，p_i' $(i=1,2,3)$ 分别为 P_i，P_i' $(i=1,2,3)$ 的参数.

以下再从几何方面说明射影变换是对合的条件.

设两重叠一维基本形 (P) 与 (P') 成为射影对应：$(P)\barwedge(P')$．P_i，$P_i'(i=1,2,3)$ 是三对对应元素. 把 P_1' 作为 (P) 中的元素，它的象是 (P') 中的 Q' 一般地，Q' 与 P_1 不同．如果 $(P)\barwedge(P')$ 是一个对合，则 Q' 与 P_1 重合．并且有

$$(P_1P_1', P_2P_3)=(P_1'P_1, P_2'P_3') \qquad (14.9)$$

(14.9) 就是利用交比表示的三对对应元素属于同一对合的条件. 又不难证明，在射影变换里，只要有一对对应元素满足对合对应的要求，则所有其余的对应元素对都满足要求．事实上，如果 P_1，P_1' 是一对满足对合条件的对应元素，P_2，P_2' 是这个射影变换里另一对对应元素．设 P_2' 作为第一基本形的元素时，其对应元素为 P. 则根据射影变换的定义与交比的性质有

$$(P_1P_1', P_2P_2')=(P_1'P_1, P_2'P)=(P_1P_1', PP_2')$$

因此 $\bar{P}$ 与 P_2 重合．这说明 P_2, P_2' 这对对应元素也满足对合要求．

所以如果射影变换有一对对应元素满足对合对应要求，则一定是对合．

现在讨论对合的二重元素．要求得二重元素，只需求出与它们相应的参数，为此把 $b=c$ 代入射影变换自对应元素满足的方程(13.3)：

$$a\lambda^2+(b+c)\lambda+d=0$$

就得到

$$a\lambda^2+2b\lambda+d=0 \qquad (ad-b^2\neq 0) \tag{14.10}$$

由(14.10)可以求出两根 λ_1, λ_2，对于每一个根就得到一个二重元素．由于 $ad-b^2\neq 0$，所以对合一定有两个不同的二重元素（实或虚）．

在 § 13 的例题里已经证明，如果 P, P' 是射影变换的一对对应元素，E, F 是两个不同的二重元素，则 $(PP', EF)=$ 常数．如果是对合，则这个常数等于 -1．这因为根据对合的性质知 $(PP', EF)=(P'P, EF)$．所以 $(PP', EF)=-1$．

反过来，如果 $P, P'; Q, Q'$；…都是与二固定点 E, F 调和共轭的点偶，则 $P, P'; Q, Q'$；…是属于同一对合的对应点对且以 E, F 为二重点．这是因为当 E, F, P 给定时，则点偶 E, F 与 P, P' 调和共轭的点 P' 唯一确定，所以 P, P' 满足对合的要求．

综上所述，得到关于对合的二重元素的定理：

定理 14.3 对合对应存在两个二重元素，射影变换是对合的充要条件是任何一对对应元素与两个二重元素调和共轭．

例 1 求被两对对应元素 1 与 $\frac{1}{2}$，0 与 2 所决定的对合的方程．

解 设 $a\lambda\lambda'+b(\lambda+\lambda')+d=0$ 为所求方程，则

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}a+\dfrac{3}{2}b+d=0\\ \qquad 2b+d=0\end{cases}$$

所以

$$a:b:d=1:1:-2$$

于是

$$\lambda\lambda'+\lambda+\lambda'-2=0$$

为所求的对合方程.

例 2 设 A, A'; B, B' 是对合的两对对应元素，E, F 是二重元素.

求证 $A, B; A', B'; E, F$ 属于另一对合.

证明 由题设有

$$(AB', EF)=(A'B, EF)$$

所以

$$(AB', EF)=(BA'FE)$$

根据(14.9)知 $A, B; A'$, B'; E, F是属于同一对合的三对对应点.

例 3 **求证** 不通过顶点的任何直线与完全四点形三对对边的交点是属于同一对合的三对对应点(笛沙格对合定理).

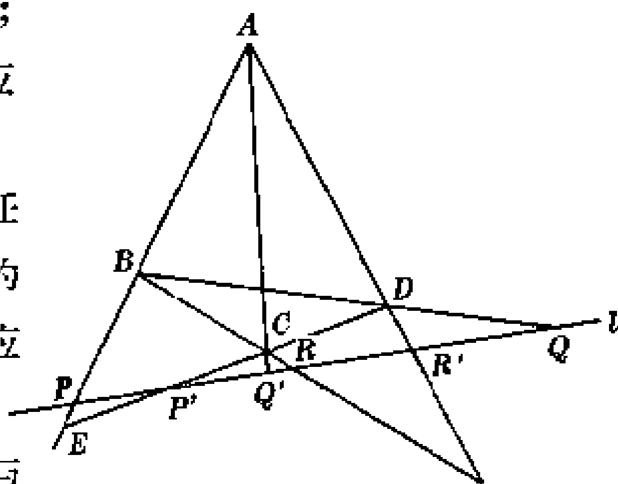


图 14-2

证明 如图 14-2, 直线 l 与完全四点形$ABCD$的三对对边的交点 $P, P'; Q, Q'; R, R'$ 在 l 上决定一个射影变换. 现在证明它是一个对合.

$$(P, P', Q, R)\overset{(B)}{\overline{\wedge}}(E, P', D, C)\overset{(A)}{\overline{\wedge}}(P, P', R'Q')$$

所以

$$(PP', QR)=(PP', R'Q')=(P'P, Q'R')$$

因此这个射影变换是一个对合.

思考：已知对合的两对对应点，如何作出其他任何点的对应点？

习　题

1. 求被两对对应元素 2 与 2, 1 与 4 所决定的对合的方程.

2. 求对合的方程. 这个对合的二重元素的参数为:

(1) 2 与3; (2) 方程 $\alpha t^2+2\beta t+\gamma=0$ 的根.

3. 求对合的二重点的参数，这个对合由满足下列方程的对应点偶所决定:

(1) $t^2-1=0$ 与 $t^2-3t+1=0$;

(2) $t^2-t-1=0$ 与 $2t^2-2t-1=0$.

4. 设 A, B, C, D 是共线点且 $(AB, DP)=(AB, PC)$. 求证: P 有两种可能位置且与 A, B 调和共轭.

5. 写出笛沙格对合定理的对偶定理.

6*. 设 A, B, C, A', B', C' 是共线点且

$$(AA', BC)=(BB', CA)=(CC', AB)=-1$$

求证: A, A'; B, B'; C, C' 是同一对合的对应点.

7*. 求证: 线束的对合必有一对互相垂直的对应直线. 问能不能有更多对对应直线互相垂直?

8*. 求证: 任何非恒等的射影变换, 如果不是对合, 则必是两个对合的乘积.

§ 15　二维射影变换

本节把 § 12, § 13 的理论推广到二维情况，主要讨论一个平面上的点到另一个平面上的点之间的射影对应.

15.1 非奇线性对应与射影对应

设 π 与 π' 是两个平面，在每一个平面上有一个笛氏（齐次）坐标系．考虑平面 π 的点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 到平面 π' 的点 $P'(x_1', x_2', x_3')$ 的一个对应

$$\begin{cases}\rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.\end{cases} \qquad |A| = |a_{ij}| \neq 0 \quad (15.1)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \rho \neq 0$$

这个对应叫做非奇线性对应，A 叫做它的方阵，$|A|$ 叫做它的行列式，a_{ij} 叫做对应的系数或参数．对应(15.1)可以缩写为

$$\rho x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (15.1)'$$

若用矩阵写法，则又可写为：

$$\rho\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

应该注意的是，根据齐次坐标的性质，因子 $\rho(\rho \neq 0)$ 的取法对于平面 π' 有坐标 $(\rho x_1', \rho x_2', \rho x_3')$ 的点 P' 没有影响，所以每个点 P 只能有唯一一个点 P' 作它的象．

如果只讨论两平面上的有穷远点，则可以把(15.1)写为非齐次坐标形式

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ y' = \dfrac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \end{cases} \qquad (15.2)$$

仿照定理 12.5 的证明，可以证明非奇线性对应必是平面 π 上与平面 π' 上点之间的一一对应.

现在考虑(15.1) 能否建立平面 π 上与平面 π' 上的直线间的一一对应.

设在平面 π 有一直线，它的齐次线坐标是$[u_1, u_2, u_3]$，这直线的方程是

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \tag{15.3}$$

为了说明(15.3)在 π' 内的对应图形，将(15.1)′的逆

$$\sigma x_i=\sum_{j=1}^{3}A_{ji}x'_j \qquad (i=1,2,3) \tag{15.4}$$

代入(15.3)式得

$$x'_1\sum_{j=1}^{3}A_{1j}u_j+x'_2\sum_{j=1}^{3}A_{2j}u_j+x'_3\sum_{j=1}^{3}A_{3j}u_j=0$$

此方程表示 π' 内的一条直线，它的线坐标是

$$\lambda u'_i=\sum_{j=1}^{3}A_{ij}u_j \qquad (i=1,2,3),\ \lambda\neq 0$$

且$|A_{ij}|=|a_{ij}|^2\neq 0$，这说明上式是直线间的非奇线性对应. 因此得到以下定理.

定理 15.1 平面 π 上的点到平面 π' 上的点的非奇线性对应(15.1)建立了 π 上的直线到 π' 上的直线的非奇线性对应

$$\lambda u'_i=\sum_{j=1}^{3}A_{ij}u_j \quad (i=1,2,3),\ \lambda\neq 0 \tag{15.5}$$

推论 $\lambda u'_i=\sum_{j=1}^{3}A_{ij}u_j$ 的逆对应是

$$\mu u_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ji}u'_j \quad (i=1,2,3),\ \mu\neq 0 \tag{15.6}$$

证明 设α_{ij}是$|A_{ij}|$中A_{ij}的代数余子式，则有

$$\alpha_{ij}=|a_{ij}|a_{ij}$$

利用上式与(15.4)即可得证.

所谓二平面的点之间的透视对应就是二平面的点之间的一一对应，使得对应点的连线共点(参考§12). 下面定义射影对应.

定义 15.1 两个平面的点之间的一一对应如果满足下列条件:

(1) 任何共线点的象仍是共线点;

(2) 任何共线四点的交比等于其对应四点的交比.

则此一一对应叫做射影对应.

同样可以给出两个平面的直线之间的射影对应的定义.

两个平面的点或两个平面的直线的射影对应是同素对应（点对应点从而直线对应直线或直线对应直线从而点对应点). 通常说同素对应系指点到点的同素对应. 又由定义可以看到以下性质

(1) 两平面的点之间的透视对应必是射影对应;

(2) 两平面的点之间的射影对应满足等价关系的要求.

现在要证明(15.1)是两平面的点之间的射影对应，为此指出以下引理，证明留给读者考虑.

引理 设非奇线性对应(15.1)使平面π内的点a与b顺次对应平面π'内的点a'与b'. 则π内的点$a+\lambda b$必对应π'内的点$\rho_1a'+\lambda\rho_2b'$，此处ρ_1与ρ_2顺次为a对应a'与b对应b'的比例常数ρ的值.

定理 15.2 两平面π与π'内各建立笛氏坐标系，则这两个平面的点之间的非奇线性对应必是射影对应.

证明 我们已经知道，非奇线性对应(15.1)是两平面π与π'的点之间的一一对应而且建立了π与π'内直线之间的一一对应.

现在证明(15.1)保持交比不变.

在 π 上取四个不同的共线点: $a, b, a+\lambda_1 b, a+\lambda_2 b$. 根据引理，它们在 π' 上的对应点是: $a', b', \rho_1 a'+\lambda_1\rho_2 b', \rho_1 a'+\lambda_2\rho_2 b'$. 因此它们的交比都是$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. 所以(15.1)是射影对应.

下面证明定理 15.2 的 逆 定理. 为此先指出以下定理（证明从略).

定理 15.3 两平面 π 与 π' 内各建立笛氏坐标系，设 π 内任何四个不同点 $P_i(i=1,2,3,4)$，其中无三者共线; π' 内任何四个不同点 P'_i $(i=1,2,3,4)$，其中也无三者共线. 则从 π 到 π' 存在唯一一个非奇线性对应使 P_i 对应 P'_i $(i=1,2,3,4)$.

这个定理叫做茂毕乌斯(Möbius)定理.

定理 15.4 在两平面 π 与 π' 内各建立笛氏坐标系. 则 π 与 π' 点之间的射影对应必是非奇线性对应.

证明 设 $f(P)=P'$ 是 π 与 π' 的点之间的射影对应. 在 π 上任取四点 A_1, A_2, A_3, E(其中无三者共线). $f(A_i)=A'_i$ $(i=1,2,3)$, $f(E)=E'$ (图 15-1).

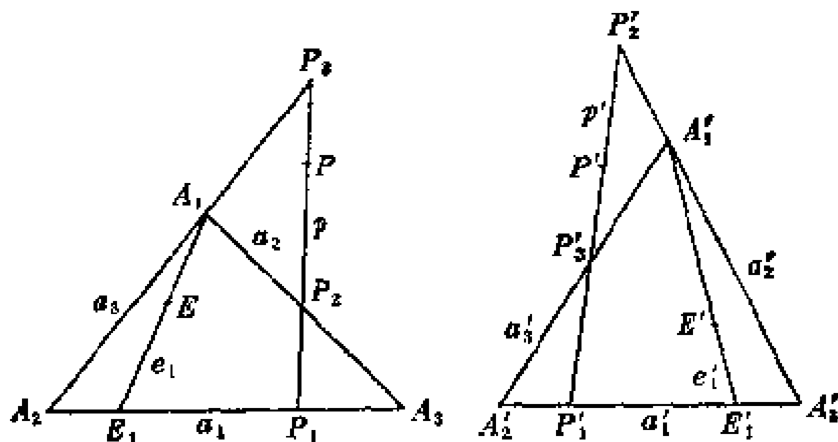


图 15-1

由于 f 也使 π 与 π' 的直线建立了一一对应，所以 A'_1, A'_2, A'_3 E' 中也无三者共线.

根据定理 15.3，使四点 A_1, A_2, A_3，E 顺次与四点 A'_1, A'_2, A'_3，E' 对应的非奇线性对应必唯一存在，记为 $\varphi(P)=P'$. 下面证明 $\varphi=f$.

如图 15-1，f，φ 都使 A_i 对应 A'_i $(i=1, 2, 3)$，E 对应 E'. 所以也都使 a_i 对应 a'_i $(i=1,2,3)$，e_1 对应 e'_1. 因此 f，φ 也都使 E_1 对应 E'_1.

现在看两直线 a_1, a'_1. 对应 f，φ 都使 a_1 与 a'_1 的点之间建立了射影对应且有三对对应点相同. 所以对于 a_1 上的任何点，关于 f 与 φ 的对应点相同. 同理对于 a_2，a_3 上的点也是如此. 因此 f 与 φ 使三点形 $A_1A_2A_3$ 边上的点在三点形 $A'_1A'_2A'_3$ 的对应边上有相同的象.

最后，设 P 是不在 $A_1A_2A_3$ 边上的任何点. 通过 P 的任何直线 p 交三边于不同点 P_1, P_2, P_3. 两对应 f，φ 都使 p 上三点 P_1, P_2, P_3 顺次对应 p' 上三点 P'_1，P'_2，P'_3. 而点 P'_1, P'_2, P'_3 在三点形 $A'_1A'_2A'_3$ 三边上. 因此点 P 关于 f 与 φ 的对应点相同.

由于关于 f 与 φ，任何点的象相同，所以 $f=\varphi$. 定理得证.

推论 在一平面内有四点 P_i $(i=1,2,3,4)$，其中无三点共线，在另一平面内也有四点 P'_i $(i=1,2,3,4)$，其中无三点共线. 则从该平面到另一平面存在唯一一个射影对应，使 P_i $(i=1,2,3,4)$ 对应 P'_i $(i=1,2,3,4)$.

定理 15.2 与定理 15.4 说明了射影对应与非奇线性对应的等价性.

15.2 射影变换及其不变元素

定义 15.2 在定义 15.1 中，如果两个平面是重合的，则所建立的射影对应叫做该平面的射影变换.

这个定义就是说同一平面内的射影对应为射影变换. 这与第

一章里把同一平面内的仿射对应叫做仿射变换是一样的.

因为我们讨论的是同素射影对应，所以射影变换也叫做同素射影变换，简称同素变换.

定理 15.1, 15.2, 15.4 对于射影变换的情况也都是成立的，但要注意这时的坐标是对于同一个坐标系来说的. 定理 15.3 也只有一个坐标系且 $P_i(i=1,2,3,4)$ 与 $P'_i(i=1,2,3,4)$ 是在同一平面内的点. 根据定理 15.3 还有以下推论.

推论 设四点 $P_i(i=1,2,3,4)$ 中无三点共线，则使这四点都不变的射影变换必是恒等变换.

由这个推论知非恒等的射影变换不能有四个不变点而且其中无三点共线.

现在来看(15.1)的不变点，如果(y_1, y_2, y_3)是不变点，则$y'_i=\mu y_i(i=1,2,3)$, $\mu\neq 0$. 将此式代入(15.1)得:

$$\begin{cases}(a_{11}-\mu)y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3=0\\ a_{21}y_1+(a_{22}-\mu)y_2+a_{23}y_3=0\\ a_{31}y+a_{32}y_2+(a_{33}-\mu)y_3=0\end{cases}$$

由于 y_1, y_2, y_3 不全是零；故有

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\mu & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\mu\end{vmatrix}=0$$

这就是(15.1)存在不变点的条件. 此外还可以根据方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\mu & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\mu\end{pmatrix}$$

的秩数具体说明不变点的存在情况，我们不详细论证了.

例 求射影变换

$$\begin{cases}\rho x_1' = -x_1 \\ \rho x_2' = \quad x_2 \\ \rho x_3' = \quad\quad x_3\end{cases}$$

的不变元素.

解 先解方程

$$\begin{vmatrix} -1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu \end{vmatrix} = 0$$

即

$$-(1+\mu)(1-\mu)(1-\mu)=0$$

所以

$$\mu=-1, \mu=1(\text{二重根})$$

当 $\mu=1$ 时 $\begin{pmatrix} -1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为 1. 得 $y_1=0$.

这条直线上的点都是不变点，这条直线当然也就是不变直线(不变直线一般不必要求其上每一点都不变，而只要求该直线的象仍为自身).

当 $\mu=-1$ 时 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-(-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-(-1) \end{pmatrix}$ 的秩为 2. 得

$$\begin{cases}0y_1+2y_2+0y_3=0 \\ 0y_1+0y_2+2y_3=0\end{cases}$$

由这个方程组得不变点(1, 0, 0).

习　　题

1. 证明定理 15.2 前面的引理.
2. 求一个射影变换，使点(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1)分别变为

点(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1).

3. 求使三点(0, 0), (1, 0), (0, 1)分别对应(0, 0), (0, 1), (1, 0)且使直线$x+y+1=0$对应无穷远直线的射影对应

4. (1) 求射影变换

$$\begin{cases}\rho x_1' = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \rho x_2' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \rho x_3' = x_1 + x_2 + x_3\end{cases}$$

的逆并分别用齐次坐标与非齐次坐标表示.

(2) 问(1)中每一平面内的影消线是什么? 再说明一般情况: 对应(15.1)中影消线如何表示?

5. 求射影变换

$$\begin{cases}\rho x_1' = x_1 + x_2 \\ \rho x_2' = \quad x_2 \\ \rho x_3' = \quad x_3\end{cases}$$

的不变点.

6. 设一个射影变换只有三个不共线的不变点. 求证: 这个变换可以写为

$$\begin{cases}\rho x_1' = ax_1 \\ \rho x_2' = \quad bx_2 \\ \rho x_3' = \quad\quad cx_3\end{cases}$$

其中a, b, c是两两不等的非零数.

7*. 变换

$$\begin{cases}\rho x_1' = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \rho x_2' = x_1 + x_2 + x_3 \\ \rho x_3' = 4x_1 - 5x_2 + x_3\end{cases}$$

是奇异的, 即其系数行列式为零. 求证: 它把整个平面的点除一点外变到直线$3x_1' - 2x_2' - x_3' = 0$上. 哪一点是例外?

8*. 求证: 两平面的点之间的射影对应可以表为不多于三个透视对应的乘积(这就是说射影对应可以由透视对应链表示).

§ 16 射影坐标

本章最后，我们在射影平面上建立以射影不变量交比为基础的坐标系——射影坐标系．说明前面几节的结果在射影坐标系之下仍然成立．最后指出仿射坐标与笛氏坐标都是射影坐标的特例．

16.1 一维射影坐标

定义 16.1 在射影直线上任取三个不同点 P_0, P_1, P_*，则建立了一个一维射影坐标系．这三个点叫做基点，其中 P_0 叫做原点，P_1 叫做单位点(图 16-1)．对于直线上任何点 P，关于 P_0，P_1, P_* 的射影坐标 x 规定为交比 (P_*P_0, P_1P) 即

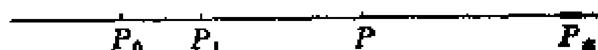


图 16-1

$$x=(P_*P_0, P_1P)$$

不难看出，对于任何点 P(P 不是 P_*)，都有射影坐标．特别地，点 P_0 的坐标是 0，P_1 的坐标是 1，P_* 则无坐标．

对于任何一个实数 x，必可决定唯一一个点 P，使它的坐标是 x．

特殊情况：

(1) 仿射坐标

把点 P^* 看作是无穷远点，则 $x=\dfrac{P_0P}{P_0P_1}$ 即为点 P 的仿射坐标．

(2) 笛氏坐标

把点 P^* 看作是无穷远点且 $P_0P_1=1$ 则 $x=P_0P$ 即为点 P 的笛氏坐标．

为了点 P^* 的坐标，再引入齐次射影坐标.

定义 16.2 射影坐标为 x 的点的一维齐次射影坐标 (x_1, x_2) 定义为任何满足 $\frac{x_1}{x_2}=x$ 的二数 x_1, x_2，其中 $x_2\neq 0$. 我们规定 $(x_1, 0)$，其中 $x_1\neq 0$，为 P_* 的齐次射影坐标.

设一直线上射影坐标系的基点 P_0, P_1, P_* 的笛氏坐标分别为 x_0, x_1, x_*. 又任何点 P 的笛氏坐标是 x，射影坐标是 x'，则

$$x'=(P_*P_0, P_1P)=\frac{(x_*-x_1)}{(x_0-x_1)}\frac{(x_0-x)}{(x_*-x)}$$

即

$$x'=\frac{(x_*-x_1)(x_0-x)}{(x_0-x_1)(x_*-x)} \tag{16.1}$$

可以写为

$$x'=\frac{a_{11}x+a_{12}}{a_{21}x+a_{22}}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 都是常数且满足 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.]

因此得到以下定理.

定理 16.1 一直线上点的笛氏坐标与射影坐标的变换是非奇线性变换.

注意： 一般常把坐标变换式(16.1)写为

$$x=\frac{b_{11}x'+b_{12}}{b_{21}x'+b_{22}}, \quad b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}\neq 0 \qquad (16.1)'$$

推论 一直线上一个点的射影坐标与另一种射影坐标的变换是非奇线性变换.

为了证明这个推论的逆命题，我们先证明以下定理：

定理 16.2 一直线四点的交比用射影坐标表示与用笛氏坐标表示形式完全相同.

证明 设 P_1, P_2, P_3, P_4 是四个共线点，它们的笛氏坐标分别

为 x_1, x_2, x_3, x_4, 射影坐标分别为 x'_1, x'_2, x'_3, x'_4. 则有

$$(P_1P_2, P_3P_4)=\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_2-x_3)(x_1-x_4)}$$

由(16.1)式有

$$x'_i=\frac{a_{11}x_i+a_{12}}{a_{21}x_i+a_{22}} \qquad (i=1,2,3,4)$$

所以

$$x'_i-x'_j=\frac{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(x_i-x_j)}{(a_{21}x_i+a_{22})(a_{21}x_j+a_{22})}$$

因此得

$$\frac{(x'_1-x'_3)(x'_2-x'_4)}{(x'_2-x'_3)(x'_1-x'_4)}=\frac{(x_1-x_3)(x_2-x_4)}{(x_2-x_3)(x_1-x_4)}$$

定理 16.3 一个点的射影坐标经过非奇线性变换必得到该点的另一个射影坐标.

证明 设 x 是点 P 的射影坐标, 经过非奇线性变换(16.1)后得到 x'. 要证明 x' 是 P 的另一个射影坐标.

设 $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_*}$ 是三个不同点的射影坐标, 经过(16.1)得到的对应值分别为 $\overline{x'_0}, \overline{x'_1}, \overline{x'_*}$.

与定理 16.2 类似, 可以证明

$$\frac{(\overline{x'_1}-\overline{x'_*})(x'-\overline{x'_0})}{(\overline{x'_1}-\overline{x'_0})(x'-\overline{x'_*})}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_*)(x-\bar{x}_0)}{(\bar{x}_1-\bar{x}_0)(x-\bar{x}_*)}$$

取 $\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_*}$, 使对应的 $\overline{x'_0}, \overline{x'_1}, \overline{x'_*}$ 的值分别为 $0, 1, \infty$. 则由 $\overline{x'_0}=0$, $\overline{x'_1}=1$ 得

$$\frac{1-\overline{x'_*}}{x'-\overline{x'_*}}x'=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_*)(x-\bar{x}_0)}{(\bar{x}_1-\bar{x}_0)(x-\bar{x}_*)}$$

当 $\overline{x'_*}\to\infty$ 时, 有

$$x'=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_*)(x-\bar{x}_0)}{(\bar{x}_1-\bar{x}_0)(x-\bar{x}_*)} \tag{16.2}$$

(16.2)式右端表示射影坐标系下四点的交比, 因此(16.2)式

说明 x' 是一个射影坐标. 这个坐标系的基点关于旧坐标系的坐标分别为 $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_*$.

定理 12.4 与定理 12.5 曾证明一维射影对应与非奇线性对应的等价性, 这两个定理都引用了笛氏坐标. 通过以上的讨论, 现在得到以下定理.

定理 16.4 用射影坐标表示两个点列间的射影对应必是非奇线性对应, 反过来也成立. 即射影对应与非奇线性对应等价. 如果对同一个点列来说, 即为射影变换与非奇线性变换等价.

根据定理 16.1 的推论与定理 16.3 知, 非奇线性变换可以理解为两个不同的射影坐标系之间的坐标变换, 而根据定理 16.4 可知非奇线性变换又可以理解为关于射影坐标系的射影变换.

16.2 二维射影坐标

现在首先对平面内的仿射坐标作新的理解.

设仿射坐标系的基向量为 $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$. 作 $E_2E /\!/ OE_1$, $E_1E /\!/ OE_2$, 点 E 为仿射坐标系的单位点.

令平面内任何点 P 的仿射坐标为 (x, y), 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}\\ &= x\overrightarrow{OE_1} + y\overrightarrow{OE_2}\end{aligned}$$

其中

$$x = \frac{OP_1}{OE_1} = \frac{P_1O}{E_1O} = (P_1E_1O)$$

$$y = \frac{OP_2}{OE_2} = \frac{P_2O}{E_2O} = (P_2E_2O)$$

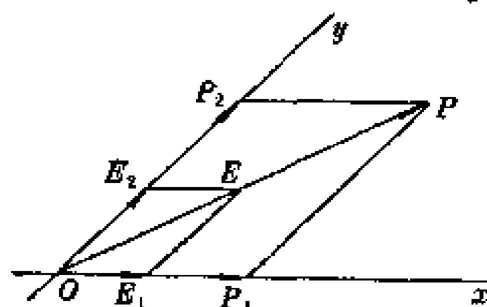


图 16-2-1

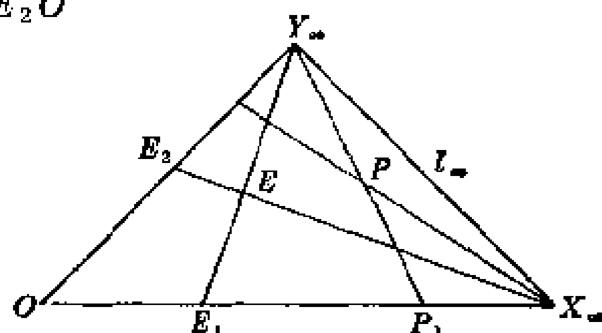


图 16-2-2

由于 EE_1, PP_1 都平行 Oy 轴，所以它们都通过 Oy 轴上的无穷远点 Y_∞. 同理 EE_2, PP_2 都通过 Ox 轴上的无穷远点 X_∞(图 16-2-2)，因此有

$$x=(P_1E_1, OX_\infty)$$

$$y=(P_2E_2, OY_\infty)$$

把以上关于仿射坐标的新的理解加以推广，即取消无穷远直线的特殊性，就导出了射影平面上射影坐标的概念.

给定平面内一个三点形 OXY 与不在 OXY 三边上的一个定点 E.

对于平面内任何点 P，设直线 YE, YP 分别交 OX 于 E_1, P_1，直线 XE, XP 分别交 OY 于 E_2, P_2(图 16-3).

定义 16.3 $x=(P_1E_1, OX)$, $y=(P_2E_2, OY)$ 叫做点 P 的非齐次射影坐标.

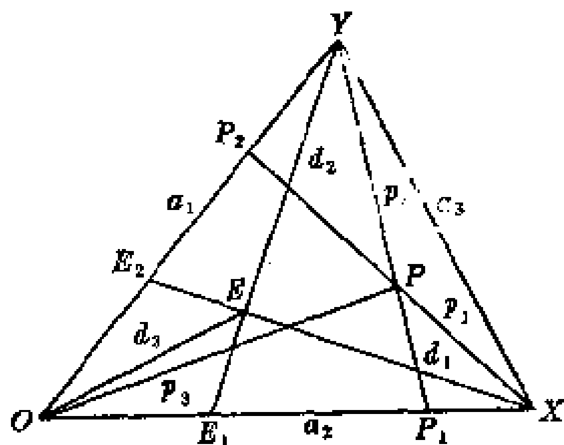


图 16-3

由定义 16.3 看到，对于直线 OX 上的点，$y=0$；对于直线 OY 上的点，$x=0$. 而对于直线 XY 上的点，则无非齐次射影坐标.

为了讨论直线 XY 上的点的坐标，再引入齐次射影坐标. 仍用图 16-3，记直线 OY, OX, XY 为 a_1, a_2, a_3，记直线 XE, YE, OE 为 d_1, d_2, d_3，记直线 XP, YP, OP 为 p_1, p_2, p_3.

令
$$\lambda_1=(a_2a_3, d_1p_1)$$

$$\lambda_2=(a_3a_1, d_2p_2)$$

$$\lambda_3=(a_1a_2, d_3p_3)$$

则由 § 10 例 1 可以证明 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$. 这说明上面三个交比中有两个是独立的.

定义 16.4 如果$\frac{x_3}{x_2}=\lambda_1$，$\frac{x_1}{x_3}=\lambda_2$，$\frac{x_2}{x_1}=\lambda_3$，则 x_1, x_2, x_3 叫做点 P 的齐次射影坐标，记为 $P(x_1, x_2, x_3)$.

由定义 16.4 看到，对于直线 a_1 上的点，$x_1=0$；对于直线 a_2 上的点，$x_2=0$；对于直线 a_3 上的点，$x_3=0$. 三点形 OXY 叫做坐标三点形(基础三点形)，O 叫做原点，E 叫做单位点. O, X, Y 的坐标分别为$(0,0,1)$，$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，E 的坐标为$(1,1,1)$.

对于不在 a_3 上的点 P，$\frac{x_1}{x_3}=x$，$\frac{x_2}{x_3}=y$ 叫做 P 的非齐次射影坐标. 需要证明，这样定义的非齐次坐标与定义 16.3 的非齐次坐标是一致的. 事实上

$$\frac{x_1}{x_3}=\lambda_2=(a_3a_1, d_2p_2)=(XO, E_1P_1)=(P_1E_1, OX)$$

$$\frac{x_2}{x_3}=\frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{(a_2a_3, d_1p_1)}=(a_3a_2, d_1p_1)$$
$$=(YO, E_2P_2)=(P_2E_2, OY)$$

所以两种说法所指的非齐次坐标是一致的.

注意：与一维的情况类似，在平面内也可以证明一个点在两个不同的射影坐标系之间的坐标变换是非奇线性变换；又在射影坐标之下，射影变换与非奇线性变换等价，因此非奇线性变换既可以理解为坐标变换也可以理解为点变换(射影变换).

还可以证明，在射影坐标系之下，直线方程是一次方程并且反过来也成立. 因此也可以引入射影线坐标的概念，与笛氏坐标的情况类似，直线方程可以当作是点坐标与线坐标的一种结合式，这样在第二章里所讨论的点方程以及点与直线的代数对偶性，当利用射影坐标时也同样成立.

例 1 求以直线 $x_3=0$，$x_2+x_3=0$，$x_1+x_2+x_3=0$ 为一新坐标三点形三边的方程且单位点不变的坐标变换公式.

解 设

$$\begin{cases}\rho x_1' = k_1 x_3\\ \rho x_2' = k_2(x_2 + x_3)\\ \rho x_3' = k_3(x_1 + x_2 + x_3)\end{cases}$$

为所求的变换式.

因单位点不变,故有

$$\rho = k_1, \quad \rho = 2k_2, \quad \rho = 3k_3$$

因此所求的变换式是

$$\begin{cases}\lambda x_1' = x_3\\ \lambda x_2' = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\\ \lambda x_3' = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\end{cases}$$

最后给出平面上一点P的齐次射影坐标(x_1, x_2, x_3)的一种度量解释

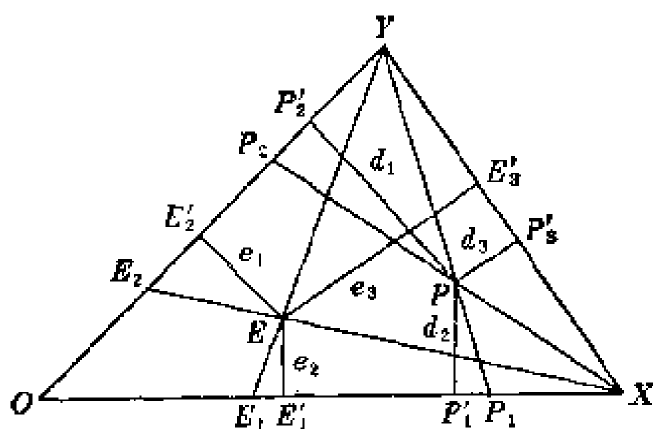


图 16-4

如图 16-4, 令E与P到坐标三点形OXY三边OX, OY, XY的垂足分别为E_1', P_1'; E_2', P_2'; E_3', P_3'. 记$EE_2'=e_1$, $EE_1'=e_2$, $EE_3'=e_3$, $PP_2'=d_1$, $PP_1'=d_2$, $PP_3'=d_3$. 这里$e_i(i=1, 2, 3)$为正; $d_i(i=1, 2, 3)$与e_i同向时为正, 与e_i反向时为负. 即P与E在一边的同侧时,对应的d_i为正,否则为负(d_i叫做离差). 则

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_3}=x&=(P_1E_1,OX)\\&=\frac{\sin\angle P_1YO}{\sin\angle E_1YO}:\frac{\sin\angle P_1YX}{\sin\angle E_1YX}\\&=\frac{\sin\angle P_1YO}{\sin\angle P_1YX}:\frac{\sin\angle E_1YO}{\sin\angle E_1YX}\\&=\frac{d_1}{d_3}:\frac{e_1}{e_3}\\&=\frac{d_1}{e_1}:\frac{d_3}{e_3}\end{aligned}$$

同理

$$\frac{x_2}{x_3}=y=(P_2E_2,\ OY)=\frac{d_2}{e_2}:\frac{d_3}{e_3}$$

所以

$$x_1:x_2:x_3=\frac{d_1}{e_1}:\frac{d_2}{e_2}:\frac{d_3}{e_3}$$

即

$$P\left(\frac{d_1}{e_1},\frac{d_2}{e_2},\frac{d_3}{e_3}\right)$$

P 的齐次坐标的符号见图 16-5.

现在在度量解释的基础上说明射影坐标的几个特例.

(1) 仿射坐标

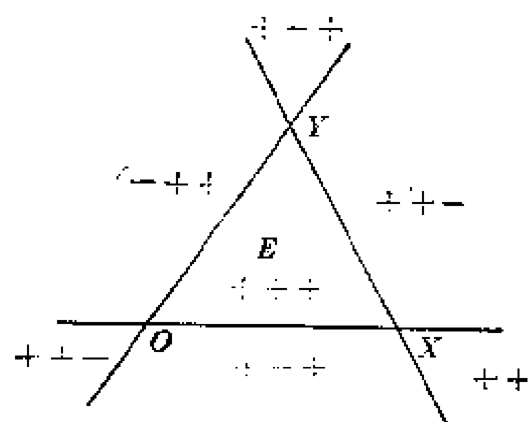


图 16-5

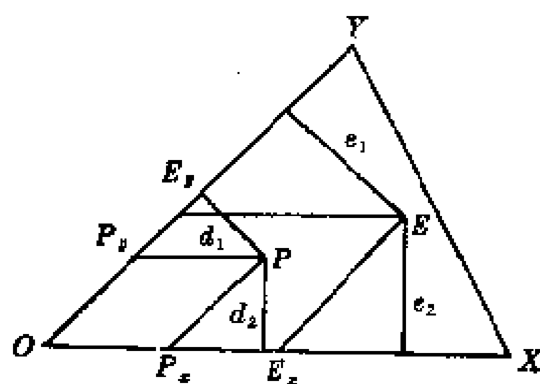


图 16-6

取 XY 为无穷远直线，则$\frac{d_3}{e_3}\longrightarrow 1$. 所以点$P$的齐次射影坐标是

$$x_1=\frac{d_1}{e_1},\quad x_2=\frac{d_2}{e_2},\quad x_3=1$$

通过P与E分别作OY的平行线交OX于P_x与E_x；通过P与E分别作OX的平行线交OY于P_y与E_y. 则有

$$x=\frac{OP_x}{OE_x},\qquad y=\frac{OP_y}{OE_y}$$

此即为以O为原点；E为单位点；OX, OY分别为x轴，y轴的仿射坐标系中点P的仿射坐标.

(2) 笛氏坐标

于(1)里再取$OE_x=OE_y=1$, 则得

$$x=OP_x,\qquad y=OP_y$$

此即为点P的笛氏坐标.

(3) 重心坐标

取E为坐标三点形OXY的重心，则有

$$\frac{e_1}{h_1}=\frac{e_2}{h_2}=\frac{e_3}{h_3}=\frac{1}{3}$$

此处h_1, h_2, h_3分别表示三边高线的长度. 因此

$$x_1:x_2:x_3=\frac{d_1}{h_1}:\frac{d_2}{h_2}:\frac{d_3}{h_3}$$

点P的射影坐标可以表示为

$$\rho x_i=\frac{d_i}{h_i}\quad (i=1,2,3)$$

这种坐标叫做重心坐标或面积坐标.

例2　求证　在重心坐标下，无穷远直线方程为

$$x_1+x_2+x_3=0$$

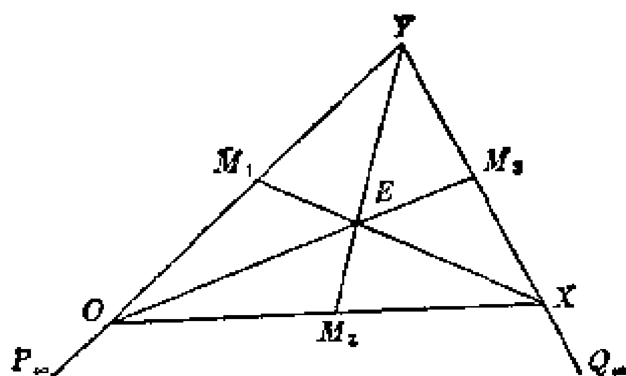


图 16-7

证明 如图 16-7，E 为坐标三点形 OXY 的重心，$M_i(i=1,2,3)$为各边中点．则根据射影坐标的度量解释与重心坐标的意义知，M_1 的齐次坐标可以写为 Y 的齐次坐标与 O 的齐次坐标之和．用以下记号表示：

$$M_1=Y+O$$

因 M_1 为 OY 的中点，所以 OY 上的无穷远点为

$$P_\infty=Y-O$$

即
$$P_\infty(0,1,-1)$$

同理
$$M_3=X+Y$$

$$Q_\infty=X-Y \quad (Q_\infty \text{ 为 } XY \text{ 上的无穷远点})$$

即
$$Q_\infty(1,-1,0)$$

因此无穷远直线 $P_\infty Q_\infty$ 的方程为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

即

$$x_1+x_2+x_3=0$$

习 题

1．设线性变换$\begin{cases}\rho x_1'=2x_1-4x_2\\ \rho x_2'=x_1-x_2\end{cases}$表示点的两个齐次射影坐标的变换．求

每个坐标系的三个基点在另一个坐标系中的坐标.

2. 设新的射影坐标系的基点 P'_*, P'_0 与单位点 P'_1 分别有旧坐标 3, -2 与 5. 求射影坐标变换公式.

3. 设非奇线性变换

$$\begin{cases}\rho x'_1 = -x_1 + x_2 + x_3\\ \rho x'_2 = x_1 - x_2 + x_3\\ \rho x'_3 = x_1 + x_2 - x_3\end{cases}$$

表示射影坐标变换. 求每一个坐标系的基点（坐标三点形的顶点与单位点）在另一个坐标系中的坐标，并求在第一坐标系中第二坐标系的坐标三点形的三边方程.

4. 如果一点与一直线的坐标相同，问经过射影坐标变换后，它们的坐标是否还相同?

5. 问以三点(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)为新坐标三点形三顶点的坐标且使新的单位点在旧坐标系的坐标是(3, 2, 1)的坐标变换是否确定?

6. 求证: 适当地选择射影坐标系，三角形的垂心的坐标可以写为

$$(\cos A_2\cos A_3,\ \cos A_3\cos A_1,\ \cos A_1\cos A_2)$$

7. 在重心坐标下，求两直线 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 与 $a'x_1+b'x_2+c'x_3=0$ 平行的条件.

第四章　变换群与几何学

本章介绍变换群的概念，证明若干类变换的集合构成群，有了这些具体的变换群，在讨论图形关于它们的不变性质的基础上，说明用变换群的观点去研究相应的几何学的思想.

关于抽象群的基本概念可以参看附录§1.

§17　变换群的概念

我们在§1曾引入变换以及变换乘法的概念. 现在对于变换可以证明以下定理.

定理 17.1　一个集合S的所有一一变换的集合对于变换的乘法构成群.

证明　(1) 任何两个一一变换的乘积还是一一变换;

(2) 变换的乘积满足结合律;

(3) 恒等变换E对于任意变换T有$ET=TE=T$. 因此E是单位元素;

(4) 如果T: $a \longrightarrow a'$是一一变换，则规定T^{-1}: $a' \longrightarrow a$，可以证明T^{-1}是一一变换且$T^{-1}T=TT^{-1}=E$. 因此T^{-1}是T的逆元素.

由(1)、(2)、(3)、(4)知S的所有一一变换的集合对于变换的乘法构成群.

除了S的所有一一变换构成群G以外，G的子集也可能构成群.

定义 17.1　一个集合S的若干个一一变换对于变换乘法构成

的群叫做 S 的一个变换群. 如果一个变换群的每一个变换由 n 个独立参数决定,则称此变换群为 n 阶群(n 维群).

可以证明,一个变换的集合 G,如果构成群,则 G 只含有一一变换. 关于一一变换的集合构成群的条件有以下定理.

定理 17.2 集合 S 的若干个一一变换所组成的集合 G 构成变换群的充要条件是:

(1) 如果 $\tau_1, \tau_2 \in G$, 则 $\tau_1\tau_2 \in G$;

(2) 如果 $\tau \in G$, 则有逆变换 $\tau^{-1} \in G$.

证明 设 G 构成群, 则(1),(2)显然成立.

再证充分性:

由(1) G 对变换乘法是封闭的;

对任何 $\tau \in G$, 由(2)有 $\tau^{-1} \in G$ 使 $\tau^{-1}\tau = E$, 由(1)知 $E \in G$.

又结合律在 G 里成立, 所以 G 是变换群.

这个定理告诉我们一组变换构成群, 只需要求变换乘法的封闭性而且每个变换有逆就可以了.

例 直线上的一维射影变换集合: T_1: $X'=X$, T_2: $X'=\dfrac{1}{X}$, T_3: $X'=1-X$, T_4: $X'=\dfrac{1}{1-X}$, T_5: $X'=\dfrac{X}{X-1}$, T_6: $X'=\dfrac{X-1}{X}$, 构成一个变换群, 称为交比群.

证明 (1) 封闭性可由将运算结果写成下表看出:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_2	T_2	T_1	T_6	T_5	T_4	T_3
T_3	T_3	T_4	T_1	T_2	T_6	T_5
T_4	T_4	T_3	T_5	T_6	T_2	T_1
T_5	T_5	T_6	T_4	T_3	T_1	T_2
T_6	T_6	T_5	T_2	T_1	T_3	T_4

(2) 对任何 T_i 有逆变换:

$T_1^{-1}=T_1, T_2^{-1}=T_2, T_3^{-1}=T_3, T_4^{-1}=T_6, T_5^{-1}=T_5, T_6^{-1}=T_4$

由(1),(2)知,所给的变换集合构成变换群.

最后,注意变换群一般地说不是交换群,这从本节的例就可以看出. 此外,任何一个抽象群都与一个变换群同构,这说明变换群在群的理论里的重要性. 限于本课程内容,不在此详细论证了[*]. 一般的变换群的元素当然不一定是点变换,但是,本书中所讨论的变换群,其元素皆为点变换.

习　　题

1. 问下列一维射影变换集合是否构成群?

(1) $\rho x_1'=ax_1-bx_2,\ \rho x_2'=bx_1+ax_2$ ($a^2+b^2\neq 0$, a, b 是参数)

(2) $\rho x_1'=x_1+kx_2,\ \rho x_2'=x_2$ (k 是参数)

(3) $\rho x_1'=ax_1,\ \rho x_2'=bx_2$ ($ab\neq 0$, a、b 是参数)

2. 求证: 以下四个射影变换

$$I:\begin{cases}\rho x_1'=x_1\\ \rho x_2'=x_2\\ \rho x_3'=x_3\end{cases}\qquad T_1:\begin{cases}\rho x_1'=-x_1\\ \rho x_2'=x_2\\ \rho x_3'=x_3\end{cases}\qquad T_2:\begin{cases}\rho x_1'=x_1\\ \rho x_2'=-x_2\\ \rho x_3'=x_3\end{cases}$$

$$T_3:\begin{cases}\rho x_1'=x_1\\ \rho x_2'=x_2\\ \rho x_3'=-x_3\end{cases}$$

构成有限群并求出它的所有子群.

3. 试证: 平面上的非奇线性变换

$$\begin{cases}x'=\lambda x+a\\ y'=\lambda y+b\end{cases}\quad(\text{其中 }\lambda>0,\ a,\ b\text{ 都是参数})$$

构成群. 这个变换群是否交换群?

4. 求证: 欧氏平面内以下四个变换构成群.

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=y,\end{cases}\qquad\begin{cases}x'=-y\\ y'=x,\end{cases}\qquad\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y,\end{cases}\qquad\begin{cases}x'=y\\ y'=-x\end{cases}$$

---

* 参看张禾瑞著《近世代数基础》,人民教育出版社出版.

§ 18 平面上的几个变换群

本节介绍四个重要的变换群.

定理 18.1 射影平面内所有射影变换的集合构成群.

证明 设有射影变换

$$\tau_1:\ \rho x'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j \qquad (i=1,2,3),\quad |a_{ij}|\neq 0$$

$$\tau_2:\ \rho' x''_k=\sum_{i=1}^{3}b_{ki}x'_i \qquad (k=1,2,3),\quad |b_{ki}|\neq 0$$

即 τ_1:

$$\begin{pmatrix}\rho x'_1\\ \rho x'_2\\ \rho x'_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

τ_2:

$$\begin{pmatrix}\rho' x''_1\\ \rho' x''_2\\ \rho' x''_3\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{pmatrix}$$

所以

$$\rho\rho'\begin{pmatrix}x''_1\\ x''_2\\ x''_3\end{pmatrix}=BA\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

其中 $A=(a_{ij}) \qquad B=(b_{ki})$

$\tau_1\tau_2$:

$$\begin{pmatrix}\lambda x''_1\\ \lambda x''_2\\ \lambda x''_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

其中 $C=(c_{kj}) \qquad c_{kj}=\sum_{i=1}^{3}b_{ki}a_{ij}$

因为 $C=BA$, 所以 $|C|=|B||A|\neq 0$, 这说明 $\tau_1\tau_2$ 仍为射影变

换.

设
$$\tau:\rho\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

则
$$\tau^{-1}:\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(A_{ji})\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$$

其中 $\sigma=\dfrac{|A|}{\rho}\neq 0$, $|A_{ji}|=|a_{ij}|^2\neq 0$, 这说明 τ^{-1} 仍为射影变换; 根据定理 17.2 本定理得证.

定理 18.1 里所说的群叫做射影变换群, 简称射影群, 记之以 K. 又每一个射影变换可以由八个独立参数来决定, 所以 K 是一个八维群.

现在考虑射影变换与仿射变换的关系.

若将(15.1)式附加一定限制: 使射影平面内直线 $x_3=0$ 上的点仍变为该直线上的点, 则由于不论 x_1, x_2 为任何值($x_1=x_2=0$ 除外), 当 $x_3=0$ 时都有 $x_3'=0$, 亦即

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2\equiv 0$$

因此 $a_{31}=a_{32}=0$, 故(15.1)式化为:

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3\\ \rho x_3'=\qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3\end{cases}\tag{18.1}$$

其中
$$a_{33}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$$

就(18.1)式的有穷部分而论, 采取非齐次坐标且设

$$\frac{a_{i1}}{a_{33}}=a_i,\qquad \frac{a_{i2}}{a_{33}}=b_i,$$

$$\frac{a_{i3}}{a_{33}}=c_i\qquad (i=1,2,3)$$

则(18.1)式化为

$$\begin{cases}x'=a_1x+b_1y+c_1\\y'=a_2x+b_2y+c_2\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$$

此即为仿射变换的代数表示式.

反过来，如果在(15.1)式里，设 $a_{31}=a_{32}=0$ 则得(18.1)式.这将使 $x_3=0$ 的点变为 $x_3'=0$的点. 因此得到

定理 18.2 点场的射影变换能使无穷远点仍变为无穷远点的充要条件是在有穷部分它是仿射变换.

以后为了区别起见，我们将 § 3 所讲的仿射变换称为欧氏平面内的仿射变换. 而(18.1)式则称为仿射平面内的仿射变换. 仿射平面内的仿射变换必使无穷远点变为无穷远点，同时也使有穷远点变为有穷远点.

定理 18.3 仿射平面内所有仿射变换的集合构成群.

证明 由(18.1)式知仿射变换的乘积还是仿射变换，仿射变换的逆变换还是仿射变换，所以定理得证.

定理 18.3 里所说的群叫做仿射变换群，简称仿射群. 记之以 A，它是一个六维群.

思考：欧氏平面内仿射变换的集合也构成一个六维群(如不加声明，凡说仿射群即指仿射平面内的仿射群).

定理 18.4 欧氏平面内的所有正交变换的集合构成群.

证明 (1) 封闭性：设 τ_1, τ_2 是两个正交变换，它们的方阵分别为 A_1, A_2，它们的乘积 $\tau_1\tau_2$ 是一个方阵为 $A=A_2A_1$ 的变换. 根据方阵乘法法则我们有：

$$AA'=(A_2A_1)(A_2A_1)'=(A_2A_1)(A_1'A_2')=A_2(A_1A_1')A_2'$$

但

$$A_1A_1'=E,\qquad A_2A_2'=E$$

所以

$$AA'=A_2EA_2'=A_2A_2'=E$$

因此 $\tau_1\tau_2$ 仍是正交变换.

(2) 逆元素：设 A 是正交变换 τ 的方阵，且 B 是它的逆变换的方阵：$B=A^{-1}$.

因为 $AA'=E$, 所以 $A'=A^{-1}$, $B=A'$. 所以 $BB'=A'(A')'=A'A=A^{-1}A=E$, 于是逆变换仍是正交变换.

由(1)及(2)定理得证.

定理 18.4 里所说的群叫做正交变换群简称正交群，记之以 M. 它是一个三维群. 正交群中方阵的行列式大于零的正交变换的集合构成正交群的子群，称为运动群，它的元素称为运动.

我们已经知道仿射变换是保持无穷远直线不变的射影变换，所谓无穷远直线不变是指任何无穷远点的象仍是无穷远点. 现在进一步考虑在仿射变换里保持两个特定的无穷远点 $I(1, i, 0)$, $J(1, -i, 0)$不变的情况. 如果将两个点 I, J 看作一个集合，则说 I, J 不变就有两种可能：$I\to I$, $J\to J$ 或 $I\to J$, $J\to I$. 现在先看第一种情形 $I\to I$, $J\to J$:

设使 $I\to I$, $J\to J$ 的仿射变换为

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \rho x_3'=\qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3\end{cases}$$

因为 $I\to I$, $J\to J$, 所以

$$\begin{cases}\rho=a_{11}+a_{12}i\\ \rho i=a_{21}+a_{22}i\end{cases}\qquad\begin{cases}\rho=a_{11}-a_{12}i\\ -\rho i=a_{21}-a_{22}i\end{cases}$$

由此可得 $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=-a_{21}$, 所以仿射变换为

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1-a_{21}x_2+a_{13}x_3\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{11}x_2+a_{23}x_3\\ \rho x_3'=\qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3\end{cases}$$

化为非齐次坐标可写成

$$\begin{cases}x'=a_1x-b_1y+c_1\\y'=b_1x+a_1y+c_2\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & -b_1\\ b_1 & a_1\end{vmatrix}=a_1^2+b_1^2\neq 0$$

或

$$\begin{cases}x'=r(x\cos\theta-y\sin\theta+a)\\y'=r(x\sin\theta+y\cos\theta+b)\end{cases}\qquad \Delta=r^2$$

再看第二种情形 $I\to J,\ J\to I$:

因为 $I\to J,\ J\to I$, 我们有

$$\begin{cases}\rho=a_{11}+a_{12}i\\-\rho i=a_{21}+a_{22}i\end{cases}\qquad\begin{cases}\rho=a_{11}-a_{12}i\\\rho i=a_{21}-a_{22}i\end{cases}$$

由此可得 $a_{11}=-a_{22},\ a_{12}=a_{21}$, 所以仿射变换为

$$\begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\\rho x_2'=a_{12}x_1-a_{11}x_2+a_{23}x_3\\\rho x_3'=\qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3\end{cases}$$

化为非齐次坐标可写成

$$\begin{cases}x'=a_1x+b_1y+c_1\\y'=b_1x-a_1y+c_2\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & -a_1\end{vmatrix}=-a^2-b_1^2\neq 0$$

或

$$\begin{cases}x'=r(x\cos\theta+y\sin\theta+a)\\y'=r(x\sin\theta-y\cos\theta+b)\end{cases}\qquad \Delta=-r^2$$

我们看到以上两种情况正是 §3 里所讲的两种相似变换.

综上所述可得以下定理.

定理 18.5 保持一对点 $I(1,\ i,\ 0),\ J(1,\ -i,\ 0)$ 不变的仿射变换可以写为:

$$\begin{cases} x' = a_1x - \varepsilon b_1y + c_1 \\ y' = b_1x + \varepsilon a_1y + c_2 \end{cases} \qquad \varepsilon = \pm 1$$

当 $I\to I, J\to J$ 时，$\varepsilon=1$，为同向相似变换；当 $I\to J$，$J\to I$ 时，$\varepsilon=-1$，为异向相似变换.

反过来，不难证明：在仿射变换里，如果 $a_{11}=a_{22}$，$a_{12}=-a_{21}$，则使 $I\to I, J\to J$；如果 $a_{11}=-a_{22}$，$a_{12}=a_{21}$，则使 $I\to J$，$J\to I$. 这就是说，I，J 两点不变这一几何事实与定理 18.5 中的变换式是等价的.

定理 18.6 平面上所有相似变换的集合构成群. 称为相似变换群，简称相似群，记成 S. 它是一个四维群.

证明从略.

不难看出，M是S的子群. 至此我们在平面上得到四个变换群：射影群K，仿射群 A，相似群S，正交群M，它们的关系是

$$K\supset A\supset S\supset M$$

习　题

1. 求证：一直线上的非奇射影变换

$$\begin{cases} \rho x_1' = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\ \rho x_2' = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \end{cases} \qquad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

的全体构成群；其中 $C>0$ 的全体变换也构成群. 问：$C<0$ 的全体变换是否构成群？

2. 求证：所有平移变换或有公共旋转中心的所有旋转变换分别构成群.

3. 求证：平面内所有变换$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \beta y \end{cases}$　$\alpha\beta\neq 0$ 构成二项群，（当 $\alpha=\beta$ 时为位似变换）.

4. 求证：全体位移变换的集合构成群.

5. 求证：在仿射群中凡使系数行列式为± 1 的仿射变换构成一群（称为么模仿射群），行列式为$+1$ 者也构成群. 问行列式为-1 者如何？

6. 证明定理 18.6.

7*. 求证：在仿射群中使 $AA'=\rho E(\rho>0)$ 的变换构成相似群.

§19 变换群与相应的几何学

我们知道用公理法可以建立各种几何学，这可以说是用静的观点来研究几何学，本节将研究变换群所对应的几何学的问题，这也可以说是用动的观点来研究几何学.

讨论这个问题，我们从欧氏几何说起. 欧氏几何所研究图形 F 的性质是指在不同地点与 F 合同的一切图形所共同具有的性质. 这就是说，合同的图形本质上并无区别. 现在我们用另一种观点来说明这个事实.

由于平面上的正交变换构成群，所以正交变换具有下列三个性质：

(1) 恒等变换是正交变换；

(2) 正交变换的逆变换仍是正交变换；

(3) 两个正交变换的乘积仍是正交变换.

另一方面，我们可以利用正交变换建立合同的概念，即从一个图形经过正交变换所得到的另一个图形二者是合同的，因此可以利用正交变换使在不同地点的同一图形相合同，这样由上面正交变换的三个性质可以推出合同具有下列三个性质：

(1) 反身性：图形 F 与其本身合同，即

$$F\cong F$$

(2) 对称性：如果图形 F 合同于图形 F'，则图形 F' 必合同于图形 F，即

$$F\cong F'\Longrightarrow F'\cong F$$

(3) 传递性：如果图形 F 合同于图形 F'，图形 F' 合同于图形

F''，则图形 F 必合同于图形 F''，即

$$F\cong F' \quad F'\cong F''\Longrightarrow F\cong F''$$

因此合同关系是一种等价关系，它可以把平面上所有的图形分成类，凡是合同的图形则属于同一等价类．欧氏几何既然是研究不同地点互相合同图形的性质，也可以说它是研究等价类里一切图形所共有的性质，于是同一类里一切图形所共有的性质必是正交群下的不变性质，而且反过来说也可以，因此关于正交群不变性质所构成的命题系统就是欧氏几何学．

现将上面的讨论加以推广．设给出任意的元素集合 S 和它的一个变换群 G，对于 S 中两个子集 A 与 B，如果在群 G 中有着一个变换将 A 变为 B，则称 A 与 B 等价，可以证明这样规定的等价概念有以下性质：

（1）任何子集 A 必与自己等价；

（2）若子集 A 与子集 B 等价，则子集 B 也将与子集 A 等价；

（3）若子集 A 与子集 B 等价，子集 B 与子集 C 等价，则子集 A 将与子集 C 等价．

由此可见，上面规定的等价概念的确是一个等价关系，因此它可以决定集合 S 的一个分类方法，亦即将集合 S 分成若干个子集使得 S 的每一个元素属于而且只属于一个子集．

我们可以把集合 S 的分类方法看作 S 的一种结构．把 S 叫做空间，它的元素叫做点，它的子集叫做图形（或几何形），于是关于这变换群 G 的不变性质，可作为同一等价类里一切图形所共有的几何性质．因此我们可以用变换群观点去研究相应的几何学．我们把这种思想概括如下：

设给定一个集合以及此集合的元素间的一个变换群，我们把此集合叫做空间，集合的元素叫做点，子集叫做图形，于是空间内图形对于此群的不变性质（包括不变性与不变量）的命题系统的研

究就称为这空间的几何学，而空间的维数就称为这几何学的维数，且称此群为它的基本群．有一个变换群就相应地有一种研究在这个群作用下不变性质理论的几何学．

如果集合 S 的一个变换群 G_a 及其一个子群 G_b，它们所对应的几何分别以 A、B 表之，则由于 $G_b \subset G_a$，故对 G_a 不变的性质必对于 G_b 不变，故 A 中的一个定理一定是 B 中的一个定理，反过来 B 中的一个定理未必是 A 中的一个定理．由于这个性质，我们称几何学 B 为几何学 A 的一个子几何学．显然子几何比原几何有更丰富的内容．

象这样地把几何学与变换群连系起来而给予几何学一种新的定义的思想是德国数学家克莱因(F. klein)于 1872 年在德国艾尔兰根大学所作题为"近世几何学研究的比较评论"的报告中首先提出来的，历史上称为艾尔兰根纲领 (Erlangen programme)．近百年来数学的发展史说明了克莱因的观点在近代几何领域中起了很大的作用．概括地说，自从这种观点建立以后，对几何学的发展有两大促进作用：

(1) 它使各种几何学化为统一的形式，因而得到对立事物的某种统一、同时又明确了各种几何学所研究的对象．

(2) 它给出建立抽象空间所对应几何学的一种方法，从而把许多种几何学陆续地建立起来，例如代数几何，保形几何以及拓扑学等．此外，因欧氏微分几何学(古典微分几何)受到群论的影响，而逐渐建立了仿射微分几何、射影微分几何、保形微分几何等．

用克莱因的观点把各种几何学作统一的研究支配了近半个世纪之久，直至 1917 年列维·西维塔(Levi Civita)首先将欧氏空间的平行概念推广到黎曼空间上而建立了平行移动理论，使几何学又得到新的发展．

思考：恒等变换构成群，对于它有没有相应的几何学？

§20　射影、仿射、欧氏三种几何学的比较

在本节中我们用前节的观点说明，与§18里几个变换群相应的几何学以及它们彼此之间的关系.

关于射影群K的图形的不变性质与不变量分别叫做射影性质与射影不变量. 例如同素性，结合性，交比等. 与K相应的几何就是射影几何学.

关于仿射群A的图形的不变性质与不变量分别叫做仿射性质与仿射不变量. 例如平行性与单比等. 显然射影性质与射影不变量同时也是仿射性质和仿射不变量. 与A相应的几何就是仿射几何学.

关于正交群M的图形的不变性质与不变量分别叫做度量性质与度量不变量. 例如距离，直交性. 射影性质与仿射性质，射影不变量与仿射不变量同时也是正交性质与正交不变量. 与M相应的几何学是欧氏几何学，这种欧氏几何不妨称为移动度量几何学以强调是研究移动之下的不变量与不变性质.

关于相似群S的图形的不变性质与不变量分别叫做相似性质与相似不变量，例如角度. 与S相应的几何学称为抛物几何学或相似度量几何学. 相似群S也叫做抛物度量群.

我们知道上述几个变换群的大小关系为$K\supset A\supset S\supset M$，即射影群$\supset$仿射群$\supset$相似群$\supset$正交群. 但是就它们所对应几何的内容(研究对象)而言，关系为，射影几何$\subset$仿射几何$\subset$抛物几何$\subset$欧氏几何. 由此可见，射影几何内容最少，而欧氏几何则有丰富的内容，欧氏几何为仿射几何及射影几何的子几何，在其中还可以讨论仿射的对象(仿射性质和仿射不变量)和射影的对象（射影性质和射影不变量). 在仿射几何里也可以讨论影射的对象. 反过来，在

射影几何里则不能讨论仿射的对象或度量的对象，而在仿射几何里也不能讨论度量的对象.

一般地，基本群越大，则它所对应的几何的研究对象就越少，这是由于一个群所包含的变换越多，则对于所有这些变换图形的不变性质与不变量就越少，因之可以研究的对象就越少. 但是我们须要注意，对于某个群，图形的不变性质和不变量，要比只对它的子群图形的不变性质与不变量要"坚固"得多，因为它们对于更多的变换要显示出不变来.

为了将上面几种几何加以比较起见，我们再列表于下:

名　称	射影几何	仿射几何	抛物几何	欧氏几何
相应的变换群	射影群	仿射群	抛物度量群	正交群
变换式	略	略	略	略
参数数目	8	6	4	3
研究对象	射影性质 射影不变量	仿射性质 仿射不变量 左栏内容	相似性质 相似不变量 左栏内容	度量性质 度量不变量 左栏内容
基本不变性	结合性	平行性	相似性	合同性
基本不变量	交　比	单　比	线段之比	距　离
基本不变图形	——	无穷远直线	两点 I, J	线段(指长度)

例 1　讨论向量的哪些概念在欧氏几何里适用? 哪些概念在仿射几何里适用?

解　设在欧氏平面上有向量 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{A_1A_2}$，其中 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$.

则 $\boldsymbol{u}$ 的坐标为 $a=x_2-x_1$，$b=y_2-y_1$，$\boldsymbol{u}$ 的模数为 $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

如果经过正交变换，A_1, A_2 顺次变为 A_1', A_2'

则 $\boldsymbol{u}$ 变为 $\boldsymbol{u}'=\overrightarrow{A_1'A_2'}$.

设 $A_1'(x_1', y_1')$, $A_2'(x_2', y_2')$, 则 $\boldsymbol{u}'$ 的坐标为

$$a' = x_2' - x_1' \quad b' = y_2' - y_1'$$

但

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cos\theta \mp y_1\sin\theta + c_1 \\ y_1' = x_1\sin\theta \pm y_1\cos\theta + c_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2' = x_2\cos\theta \mp y_2\sin\theta + c_1 \\ y_2' = x_2\sin\theta \pm y_2\sin\theta + c_2 \end{cases}$$

因此有
$$\begin{cases} a' = a\cos\theta \mp b\sin\theta \\ b' = a\sin\theta \pm b\cos\theta \end{cases} \tag{20.1}$$

(20.1)是经过正交变换向量坐标的变换公式，根据(20.1)显然有

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \quad |\boldsymbol{u}'| = |\boldsymbol{u}|$$

设二向量 $\boldsymbol{u} = \{a, b\}$, $\boldsymbol{v} = \{c, d\}$，经过正交变换它们分别变为 $\boldsymbol{u}' = \{a', b'\}$, $\boldsymbol{v}' = \{c', d'\}$, 则由(20.1)有

$$\begin{cases} a' = a\cos \mp b\sin\theta \\ b' = a\sin a \pm b\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} c' = c\cos\theta \mp d\sin\theta \\ d' = c\sin\theta \pm d\cos\theta \end{cases}$$

所以如果 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, 则 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v}'$.

这说明向量的相等关系不因正交变换而改变。

此外，不难验证下面等式成立：

$$(\lambda\boldsymbol{u})' = \lambda\boldsymbol{u}'$$

$$(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \pm \boldsymbol{v}'$$

$$\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v}'$$

这说明向量的和、差、用数乘向量、内积、外积几种运算都适用于欧氏几何，因此都是欧氏几何的内容.

如果在仿射几何里考虑，经过仿射变换向量坐标的变换公式为:

$$\begin{cases} a' = a_{11}a + a_{12}b \\ b' = a_{21}a + a_{22}b \end{cases} \tag{20.2}$$

这时系数方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$满足条件$|A|\neq 0$ 而不一定满足正交条件．在这种情况下，向量的模数、内积、外积都要变化，因此这些概念都不适用仿射几何，因此都不是仿射几何的内容．但是可以证明(20.2)不改变向量的相等关系，即当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ 时有 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{v}'$．此外还可以证明(20.2)也不改变向量的和、差、用数乘向量这几种运算，所以它们都是仿射几何的内容．更一般地，仿射变换不改变向量的线性关系．即当 $l\boldsymbol{u}+m\boldsymbol{v}+n\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 时有 $l\boldsymbol{u}'+m\boldsymbol{v}'+n\boldsymbol{w}'=\boldsymbol{0}$ 其中 l, m, n 为不全等于零的实数．

例 2 在解析几何里，二次曲线的一般方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

令 $x=\frac{x_1}{x_3}, y=\frac{x_2}{x_3}$ 并记 $a_{ij}=a_{ji}$．则得齐次方程

$$F(x_1, x_2, x_3)\equiv\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0 \qquad (a_{ij}=a_{ji})$$

讨论经过射影变换后，系数行列式 $|A|$ 的变化情况（其中 $A=(a_{ij})$）．

解 $F(x_1, x_2, x_3)$可以写成：

$$F=(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

令射影变换为：

$$x_i=\sum_{k=1}^{3}c_{ik}x'_k \quad (i=1, 2, 3)$$

即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \qquad |C| = |c_{ik}| \neq 0$

则 F 经过上述变换后变为：

$F' =$

$$(x_1' x_2' x_3') \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

$$= (x_1' x_2' x_3') A' \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

其中 $A' = C' AC$。

所以 $\qquad |A'| = |C' AC| = |C'| \, |A| \, |C| = |C'| \, |C| \, |A|$

即 $\qquad |A'| = |C|^2 |A|$

这就是二次曲线 $F = 0$ 与变换后的二次曲线 $F' = 0$ 系数行列式之间的关系.

注意：在正交变换下，$|C|^2 = 1$，所以 $|A'| = |A|$，因此容易地证明了

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是二次曲线 $\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0$ 的正交不变量.

习　题

1. 下列图形各是哪种几何（最大的）的讨论对象.

(1) 相似三角形，(2) 梯形，(3) 三角形的重心，(4) 完全四点形，(5) 圆，(6) 调和点列，(7) 两个透视的三点形.

2. 下列几何量各是哪种几何(最大的)的讨论对象.

(1) 线段长度,(2) 二直线所成角度,(3) 三角形的面积,(4) 一点到一直线的距离,(5) 离心率.

3. 下列几何性质各是哪种几何(最大的)的讨论对象.

(1) 平行,(2) 垂直,(3) 平行四边形的对角线互相平分,(4) 图形相似,(5) 图形位似,(6) 共点线或共线点.

4. 求证: 二直线所成角度是相似群 S 的不变量.

第五章　二次曲线的射影理论

本章首先用射影的观点来定义二次曲线，并研究其性质，然后讨论配极理论以及二次曲线的射影分类．最后简单地介绍二阶曲线上的射影变换与对合．

§21　二次曲线的射影定义

我们知道，两个透视线束的对应直线的交点在一直线上(*)，可以把直线称为一阶曲线(一阶点列)，它的方程是关于(x_1, x_2, x_3)的一次方程；与此对偶，两个透视点列的对应点的连线通过同一点而构成一级曲线(一级线束)，它的方程是关于线坐标$[u_1, u_2, u_3]$的一次方程．在本节中我们将首先引入二阶曲线与二级曲线的定义，然后说明如果将上述透视点列、透视线束分别改成射影点列与射影线束，则得到二级曲线(二级线束)与二阶曲线(二阶点列)．

21.1　二阶曲线与二级曲线

定义 21.1　设有点，它的齐次笛氏或射影坐标(x_1, x_2, x_3)满足下列三元二次齐次方程

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0 \quad (a_{ij}=a_{ji}) \tag{21.1}$$

其中a_{ij}为实数且至少有一个不是零，则这些点的集合叫做二

定义 21.1′　设有直线，它的齐次笛氏或射影坐标$[u_1, u_2, u_3]$满足下列三元二次齐次方程

$$\sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij}u_iu_j=0 \quad (a'_{ij}=a'_{ji}) \tag{21.1$'$}$$

其中a'_{ij}为实数且至少有一个不是零，则这些直线的集合叫做

---

*　两线束中心的连线是自对应直线，它上面的点都可以看成对应直线的交点．

阶曲线．而(21.1)叫做它的方程，$|a_{ij}|$叫做系数行列式，(a_{ij})叫做系数方阵．

二级曲线．而$(21.1)'$叫做它的方程，$|a'_{ij}|$叫做系数行列式，(a'_{ij})叫做系数方阵．

定理 21.1 两个不同中心的射影线束的对应直线的交点构成一条二阶曲线．

定理 21.1′ 两个不同底的射影点列的对应点的连线构成一条二级曲线．

以上两个定理是对偶的，我们只证明定理 21.1．

在平面上引进一个笛氏或射影坐标系．

设两个线束为

$$A+\lambda B=0 \tag{21.2}$$

与

$$A'+\lambda' B'=0 \tag{21.3}$$

如果它们是射影线束，则 λ, λ' 必满足一个等式

$$a\lambda\lambda'+b\lambda+c\lambda'+d=0 \quad (ad-bc\neq 0)$$

现在对于变动的 λ, λ'，求(21.2)，(21.3)交点的集合．通过(21.2)，(21.3)及上式消去 λ, λ' 得

$$a\left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{A'}{B'}\right)-b\left(\frac{A}{B}\right)-c\left(\frac{A'}{B'}\right)+d=0$$

即

$$aAA'+dBB'-bAB'-cA'B=0 \tag{21.4}$$

因为 A, B, A', B' 都是 x_1, x_2, x_3 的一次齐次式，所以(21.4)式是一个关于 x_1, x_2, x_3 的二次齐次方程，且 $A=0, B=0$ 的交点与 $A'=0, B'=0$ 的交点坐标都满足这个方程．这说明(21.4)式表示一条二阶曲线而且两个线束的中心也在曲线上．

形成二阶曲线（二级曲线）的两个射影线束（点列）的中心（底），与曲线上其他点（直线）相比，似乎具有特殊性，其实不然；它们的地位都是平等的，因有以下对偶定理．

定理 21.2 设有某二阶曲线，它是由两个射影线束的对应

定理 21.2′ 设有某二级曲线，它是由两个射影点列的对应

直线的交点构成的，则以曲线上任意两个定点与曲线上的点相连，就得到以这两个定点为中心而成射影对应的两个线束.

点的连线构成的，则在曲线上任意取定两直线与曲线的直线相交，就得到以这两个定直线为底而成射影对应的两个点列.

我们只证明左边的定理.

设二阶曲线是由以 O, O' 为中心的射影线束所生成的，在曲线上任取二点 A，B．需要证明 $A(M)\barwedge B(M)$．其中 M 为曲线上任意点. 如(图 21-1)，记 K, K', A', B'，S 分别为 OP 与 AM，BM 与 $O'P$，$O'A$ 与 BM，OB 与 AM，$O'A$ 与 OB 的交点.

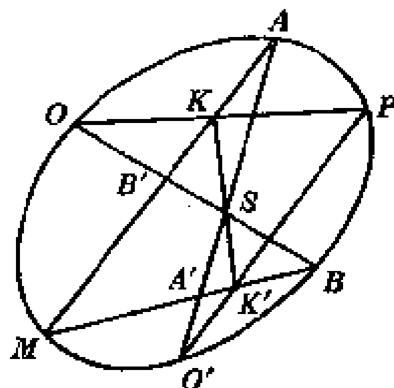


图 21-1

则 $\qquad O(ABPM)\barwedge O'(ABPM)$

所以 $\quad (AB'KM)\barwedge(A'BK'M)$

由于公共点 M 自对应，故有 $(AB'KM)\doublebarwedge(A'BK'M)$．所以 K，K'，S 三点共线．这说明当 M 点变动时，以 OP 为底的点列 (K) 与 $O'P$ 为底的点列 (K') 是透视的，(以 S 为透视中心)，因此有 $A(K)\barwedge B(K')$，而它们对应直线的交点为 M，所以 $A(M)\barwedge B(M)$.

推论 1 平面内五点，其中任意三点都不共线，则唯一决定一条二阶曲线.

推论 2 二阶曲线上任意点与此曲线上四定点连线得四直线，则此四直线的交比为常数.

思考：写出与上两推论相当的定理 21.1′ 的推论.

根据以上讨论，我们可以给出二阶曲线（二级曲线）的射影定义：

定义 21.2 在射影平面上

定义 21.2′ 在射影平面上

成射影对应的两个线束的对应直线交点的集合叫做二阶曲线.

成射影对应的两个点列的对应点的连线的集合叫做二级曲线.

要注意的是在二阶曲线的定义 21.2 里包括了退化情况,如果成射影对应的两个线束为透视的,则此时二阶曲线为两条直线(*),一条为透视轴,另一条是二线束顶点的连线(图 21-2-1). 而二级曲线的退化情况则为两点,一个点是透视中心,另一个点是二点列底的交点(图 21-2-2).

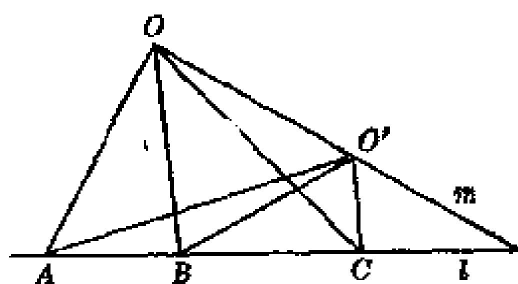


图 21-2-1

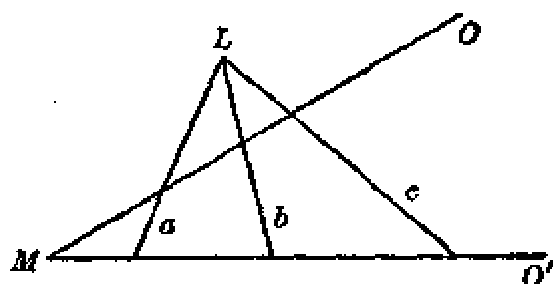


图 21-2-2

可以证明,二阶曲线退化的充要条件是在(21.1)式里 $|a_{ij}|=0$. 这样,退化二阶曲线也可定义为它的方程的系数行列式为零.

例1 设一个变动三点形,其三边分别通过不共线的三个定点、二顶点分别在二定直线(不通过定点)上移动,求第三顶点的轨迹.

解 设三点形 ABC 三边 AB, BC, CA 分别通过三定点 P, Q, R, 二顶点 A, B 分别在二定直线 a, b 上移动.

如(图 21-3)有 $R(c_1, c_2, \cdots) \doublebarwedge P(A_1, A_2, \cdots)$, $Q(C_1, C_2, \cdots) \doublebarwedge P(B_1, B_2, \cdots)$. 所以 $R(C_1, C_2, \cdots) \barwedge Q(C_1, C_2 \cdots)$.

因此,根据定义 21.2 知这两个射影线束对应直线的交点即三点形 ABC 的顶点 C 的轨迹是一条通过点 Q, R 的二阶曲线.

---

* 一般地,平面上五个点(其中无三点共线)决定一个二阶曲线, 如果有三点共线,则二阶曲线为二直线,称为退化二阶曲线.

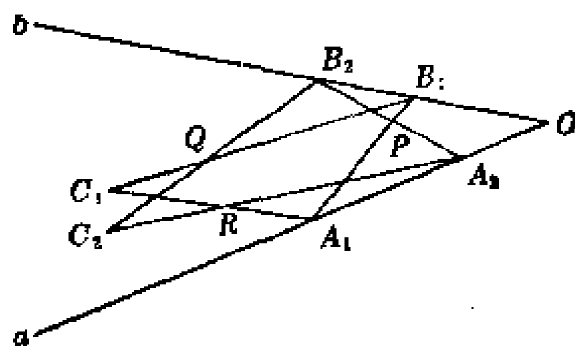


图 21-3

思考：此二阶曲线何时退化？

21.2 二阶曲线与直线的相关位置

为了说明二阶曲线与二级曲线的关系，现在讨论二阶曲线与直线的交点问题，并推出二阶曲线的切线方程.

设两点 P, Q 的坐标为 $P(p_1, p_2, p_3), Q(q_1, q_2, q_3)$. 则直线 PQ 上任意点的坐标可以写为

$$x_i = p_i + \lambda q_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

为了求直线 PQ 与二阶曲线的交点，将上式代入(21.1)式得

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(p_i + \lambda q_i)(p_j + \lambda q_j) = 0$$

亦即

$$\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} q_i q_j + \lambda \left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i q_j + \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_j q_i \right)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} p_i p_j = 0 \qquad (21.5)$$

如果点 Q 不在二阶曲线上，则(21.5)式为关于 λ 的二次方程，λ 有二值，或实或虚或重合，所以直线 PQ 与二阶曲线有二交点或实或虚或重合．这个事实说明阶数的几何意义就是直线与曲线交点的个数.

为了简捷，引入以下记号：

$$S \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$$

$$S_{pp} \equiv \sum a_{ij}p_i p_j, \qquad S_{qq} \equiv \sum a_{ij}q_i q_j$$

$$S_{pq} \equiv \sum a_{ij}p_i q_j, \qquad S_{qp} \equiv \sum a_{ij}q_i p_j$$

$$S_p \equiv \sum a_{ij}p_i x_j, \qquad S_q \equiv \sum a_{ij}q_i x_j$$

注意：由于 $a_{ij}=a_{ji}$，所以 $S_{pq}=S_{qp}$. 又以(x_1, x_2, x_3)为变量，(p_1, p_2, p_3)，(q_1, q_2, q_3)为常量，则S为二次式，S_p，S_q为一次式，S_{pp}以及 S_{pq}，S_{qp}为常数.

采用这种记法，则方程(21.5)可以写成

$$S_{qq}\lambda^2 + 2S_{pq}\lambda + S_{pp} = 0 \tag{21.6}$$

现在求非退化二阶曲线上任意点的切线方程.

设点 $P(p_1, p_2, p_3)$在二阶曲线 $S=0$ 上，则 $S_{pp}=0$，于是方程(21.6)有一个根为零. 过P点的切线与二阶曲线仅交于P点，所以另一个根也必为零，这一事实的必要充分条件为在(21.6)里$S_{pq}=0$，将 q_1, q_2, q_3 改写为(x_1, x_2, x_3)，则得P点的切线方程为 $S_p=0$(*)，即

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p x_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p x_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p x_3 = 0 \tag{21.7}$$

思考：将切线方程 $S_p=0$ 与解析几何里的二次曲线的切线方程(非齐次)加以比较，说明其一致性.

例 2 从点P所引二阶曲线的切线方程.

现在假定P不在二阶曲线 $S=0$ 上，点Q是通过P的切线上的任意点，则 PQ 交二阶曲线于重合点，因此方程(21.6)有等根，所以 $S_{pp}\cdot S_{qq}=S_{pq}^2$. 由于$Q$是通过$P$的切线上任意点，而当将 q_1,

---

* $S_p=0$ 也可以写为 $\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)p_1+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)p_2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)p_3=0$.

q_2, q_3 改写为 x_1, x_2, x_3 时 S_{qq}, S_{pq} 分别变为 S, S_p, 所以作为Q点轨迹的通过P的切线方程为 $S_{pp}\cdot S = S_p^2$. 这个方程表示两条切线，当P在二阶曲线上时二者重合为 $S_p = 0$.

21.3 二阶曲线与二级曲线的关系

定理 21.3 (Maclaurin)一个非退化二阶曲线的切线的集合是一个非退化二级曲线；反过来，一个非退化二级曲线的切点的集合是一个非退化二阶曲线.

证明：(i) 令 $S \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0$ 是一个非退化二阶曲线的方程. 如果(p_1, p_2, p_3)是它的一条定切线$[u_1, u_2, u_3]$的切点坐标，则切线方程 $S_p = 0$ 与 $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ 表示同一条直线，故有

$$\frac{a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3}{u_1} = \frac{a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3}{u_2} = \frac{a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3}{u_3}$$

$$= \rho$$

其中ρ为非零常数.

所以
$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 - \rho u_1 = 0 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 - \rho u_2 = 0 \\ a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 - \rho u_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (21.8)$$

又 $\quad u_1p_1 + u_2p_2 + u_3p_3 = 0$ （因切点在切线上） $\qquad (21.9)$

由(21.8), (21.9)消去 p_1, p_2, p_3 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (21.10)$$

将此行列式展开则得

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}u_iu_j = 0 \qquad (21.11)$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 在 $|a_{ij}|$ 中的代数余子式，且 $A_{ij}=A_{ji}$，$|A_{ij}|=|a_{ij}|^2\neq 0$.

当切线 $[u_1, u_2, u_3]$ 变动时，(21.11)是含有流动坐标 u_1, u_2, u_3 的方程，它就是二阶曲线 $S=0$ 的切线的集合的方程，表示一个非退化二级曲线.

(ii) 对偶地，可以证明非退化二级曲线 $\Sigma a'_{ij}u_iu_j=0$ 所对应的切点的集合是一个非退化二阶曲线，方程是

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & x_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & x_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad (21.12)$$

即

$$\sum_{i,j=1}^{3} A'_{ij}x_ix_j=0 \qquad (21.13)$$

其中 A'_{ij} 为 a'_{ij} 在 $|a'_{ij}|$ 中的代数余子式，且 $A'_{ij}=A'_{ji}$，$|A'_{ij}|=|a'_{ij}|^2\neq 0$.

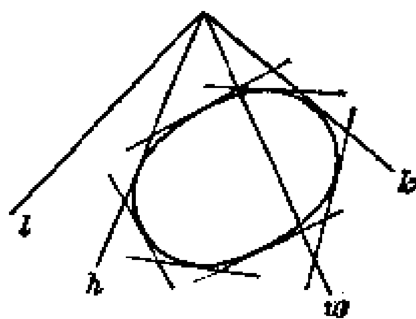


图 21-4

关于(ii)的证明，需要利用 21.2 里所论述问题的对偶，如图 21-4 所示，即求通过二直线 l, m 交点且属于二级曲线的直线 h, k (以前是求二点 P, Q 连线上属于二阶曲线的点). 记 $T\equiv\Sigma a'_{ij}u_iu_j$，再引入与 S_{pp}, S_{pq}, S_p 类似的记号 T_{ll}, T_{lm}, T_l，则所求直线由方程 $T_{mm}\lambda^2+2T_{lm}\lambda+T_{ll}=0$ 决定，其中 $[l_1, l_2, l_3]$，$[m_1, m_2, m_3]$ 分别为 l, m 的坐标. 然后再导出：如果直线 l 属于二级曲线，则切点的方程为 $T_l=0$ (或 $\left(\frac{\partial T}{\partial u_1}\right)_l u_1+\left(\frac{\partial T}{\partial u_2}\right)_l u_2+\left(\frac{\partial T}{\partial u_3}\right)_l u_3=0$). 对上述结论的详细推导，读者可以自作，这里从略.

现在在定理 21.3 的基础上，把问题再深入一步，设有二阶曲

线 $S=0$，对应二级曲线 $\Sigma A_{ij}u_iu_j=0$(即 $S=0$ 切线的集合)。再由 $\Sigma A_{ij}u_iu_j=0$ 出发，问其所对应的二阶曲线（即 $\Sigma A_{ij}u_iu_j=0$ 的切点集合)是什么?

由定理 21.3 的(ii)知，所求的二阶曲线为

$$\sum_{i,j=1}^{3}\alpha_{ij}x_ix_j=0 \qquad (\alpha_{ij}=\alpha_{ji}) \tag{21.14}$$

其中 α_{ij} 是 A_{ij} 在 $|A_{ij}|$ 中的代数余子式。但是

$$\alpha_{ij}=|a_{ij}|a_{ij}$$

故(21.14)式化为 $|a_{ij}|\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$，即

$$\Sigma a_{ij}x_ix_j=0 \qquad (a_{ij}=a_{ji})$$

这说明(21.10)所对应的二阶曲线就是原来的(21.1)。对偶地，(21.12)所对应的二级曲线就是原来的(21.1)′。

综上所述，我们可以将一个非退化二次曲线方程写为 $\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$ 或 $\Sigma A_{ij}u_iu_j=0$，而分别称为它的点坐标方程或线坐标方程(简称点方程或线方程)。

注意：1. 退化二阶曲线无对应二级曲线，退化二级曲线亦无对应二阶曲线。

2. 一般的代数曲线，其阶数(曲线作为点的轨迹时，点坐标所满足方程的次数)与级数(曲线作为直线族的包络时，直线坐标所满足方程的次数)不一定相同；但就二阶曲线而论，其阶数与级数是相等的，故二阶曲线与二级曲线统称为二次曲线。

习　题

1. 写出例 1 的对偶命题，并思考用代数法如何证明。

2. 设三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 同时外切于一个二次曲线。求证它们也同时内接于一个二次曲线。

3. 求通过点(1, 0, 1)，(0, 1, 1)，(0, −1, 1)，且以 $x_1-x_3=0$，$x_2-x_3=0$ 为切线的二次曲线方程。

4. 求通过五点$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, (a_1,a_2,a_3)的二阶曲线方程.

5. 若自点P至二次曲线$ax^2+by^2=1$的二切线与至$cx^2+dy^2=1$的二切线调和共轭, 求证P在曲线$ac(b-d)x^2+bd(a-c)y^2=ad+bc$上.

6. 设自点$P(p_1,p_2,p_3)$至二阶曲线$S=0$切线的切点为H_1、K_1、自$Q(q_1,q_2,q_3)$至$S=0$切线的切点为H_2,K_2, 求证: H_1,K_1,P,H_2,K_2,Q在同一个二阶曲线上, 其方程为$S_{pq}\cdot S=S_pS_q$.

7. 对二阶曲线的非齐次方程$S\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$, 则

$$S\equiv(x,y,1)(a_{ij})\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$$

记 $S_p\equiv(p_1,p_2,1)(a_{ij})\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}S_{pq}\equiv(p_1,p_2,1)(a_{ij})\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\1\end{pmatrix}$

若点$P(p_1,p_2)$, $Q(q_1,q_2)$在二阶曲线$S=0$上, 求证直线PQ的方程为$S_p+S_q=S_{pq}$.

8. 求由两个射影线束$x_1-\lambda x_3=0$与$x_2-\mu x_3=0(\lambda+\mu=1)$所构成的二次曲线方程.

9. 求证以下点坐标方程与线坐标方程表示同一曲线.

(1) $y^2=2px$与$V^2=\dfrac{2}{p}U$

(2) $x_1x_3-x_2^2=0$与$4u_1u_3-u_2^2=0$

(3) $x_1x_2=c^2x_3^2$与$4c^2u_1u_2=u_3^2$

(4) $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0(a_{11}a_{22}a_{33}\neq0)$与

$a_{22}a_{33}u_1^2+a_{11}a_{33}u_2^2+a_{11}a_{22}u_3^2=0$

10. 求通过二直线$[1,3]$, $[-1,-5]$交点且属于二级曲线$4u^2+v^2=2$的直线.

11. 给定二级曲线$u^2+v^2=17$和直线$[1,4]$, 求切点, 问从求出的切点出发, 如何求切线?

12. 求属于直线$[1,2,1]$的二级曲线$4u_1^2+u_2^2-u_3^2=0$的切点方程.

13. 第2、6、7各题的对偶命题如何?

§22 巴斯加定理和布利安桑定理

本节在二次曲线的射影定义的基础上证明两个著名定理．先引进下列概念．

定义 22.1 如果一个 n 点形(简单的或完全的)的顶点都在一个非退化二阶曲线上，则叫做内接 n 点形（简单的或完全的）．

定义 22.1′ 如果一个 n 线形(简单的或完全的)的边都在一个非退化二级曲线上，则叫做外切 n 线形(简单的或完全的)．

定理22.1(巴斯加（Pascal)内接于一个非退化二阶曲线的简单六点形的三对对边的交点在同一直线上（图 22-1-1)．这种直线称为巴斯加直线．

定理22.1′（布利安桑Brianchon)外切于一个非退化二级曲线的简单六线形的三对对顶点的连线交于同一点（图 22-1-2)．这种点称为布利安桑点．

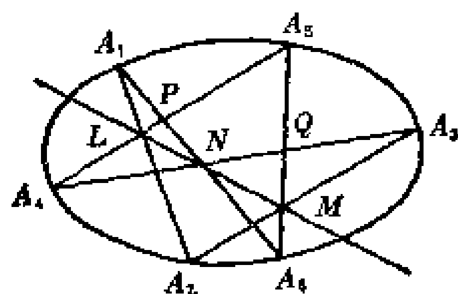


图 22-1-1

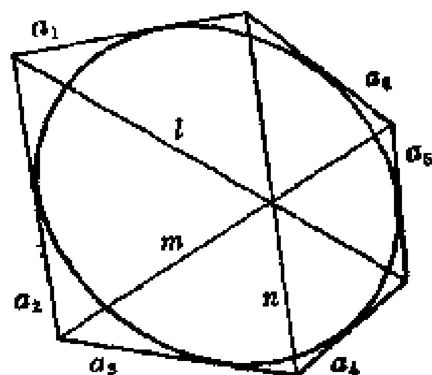


图 22-1-2

这两个定理是对偶的，我们也只证明定理 22.1．

如(图 22-1-1)，设 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 是顺次的六个顶点，对边 A_1A_2 与A_4A_5 的交点为 L，A_2A_3 与 A_5A_6 的交点为 M，A_3A_4 与 A_6A_1 的交点为 N．

以 A_1, A_3 为心分别连接其他四点，则由定理 21.2 得到

$$A_1(A_2A_4A_5A_6)\overline{\wedge}A_3(A_2A_4A_5A_6)$$

但 $A_1(A_2A_4A_5A_6)\barwedge(LA_4A_5P)$，其中 P 为 A_1A_6 与 A_4A_5 的交点. $A_3(A_2A_4A_5A_6)\doublebarwedge(MQA_5A_6)$，其中 Q 为 A_3A_4 与 A_6A_6 的交点. 所以 $(LA_4A_5P)\barwedge(MQA_5A_6)$.

由于公共点 A_5 自对应，故有 $(LA_4A_5P)\doublebarwedge(MQA_5A_6)$. 所以 LM, A_4Q, PA_6 共点，即 L、M、N 共线.

思考：开始证明时是否一定要以 A_1, A_3 为中心与其他点连线？换其他点试试看.

现在考虑在（图 22-1-1）里，如果首先知道 L，M，N 共线，则将以上证明过程反过来，不难得到 $A_1(A_2A_4A_5A_6)\barwedge A_3(A_2A_4A_5A_6)$. 这就是说 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 六点在同一个二阶曲线上，故有以下定理.

定理22.2 （巴斯加定理的逆定理）若简单六点形的三对对边交点在一直线上，则此六点形内接于一个二阶曲线.

定理22.2′ （布利安桑定理的逆定理）若简单六线形的三对对顶点的连线通过一点，则此六点形外切于一个二级曲线.

对于重要的巴斯加定理，除以上证明外，还可以用代数法证明如下：

第一步，由 §21 习题 4 知，射影平面上通过 $(0,0,1)$，$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(1,1,1)$，(a_1,a_2,a_3) 五点的二阶曲线方程为

$$a_3(a_1-a_2)x_1x_2+a_1(a_2-a_3)x_2x_3+a_2(a_3-a_1)x_1x_3=0$$

第二步，不妨假定简单六点形的顶点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 的坐标分别为 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$，$(1,1,1)$，(a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3)，而计算各边方程以及三对对边交点.

A_1A_2: $\quad x_3=0$

A_2A_3: $\quad x_1=0$

A_3A_4:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 即 } x_1 - x_2 = 0$$

A_5A_6:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

即 $(a_2b_3 - a_3b_2)x_1 + (b_1a_3 - a_1b_3)x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)x_3 = 0$

A_4A_5:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

即 $(a_3 - a_2)x_1 + (a_1 - a_3)x_2 + (a_2 - a_1)x_3 = 0$

A_6A_1:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ 即 } b_3x_2 - b_2x_3 = 0$$

令 A_1A_2 与 A_4A_5 的交点为 L, A_2A_3 与 A_5A_6 的交点为 M, A_3A_4 与 A_6A_1 的交点为 N, 则 L, M, N 的坐标为:

$L(-(a_1 - a_3), a_3 - a_2, 0)$

$M(0, -(a_1b_2 - a_2b_1), (b_1a_3 - a_1b_3))$

$N(b_2, b_2, b_3)$

第三步, 计算下列行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} -(a_1 - a_3) & (a_3 - a_2) & 0 \\ 0 & -(a_1b_2 - a_2b_1) & b_1a_3 - a_1b_3 \\ b_2 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= b_3(a_1 - a_3)(a_1b_2 - a_2b_1) + b_2(a_3 - a_2)(b_1a_3 - a_1b_3) + b_2(a_1 - a_3)(b_1a_3 - a_1b_3)$$

$$=b_1b_2a_3(a_1-a_2)+b_2b_3a_1(a_2-a_3)+b_3b_1a_2(a_3-a_1)$$

我们看到Δ刚好是将 A_6 的坐标 (b_1, b_2, b_3) 代入第一步所得二阶曲线方程左端的值．由于 L, M, N 三点共线的充要条件是 $\Delta=0$，所以当且仅当六点形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 内接于一个二阶曲线时，其三对对边的交点 L, M, N 在同一直线上，巴斯加定理及其逆定理得证．

两个著名定理的极限情形：

如果内接六点形的某两个相邻顶点重合，则过这两个顶点的边变为切线，六点形变为五点形而得到以下定理．

定理22.3 内接于非退化二阶曲线的五点形某个顶点的切线与该顶点的对边的交点必在其余两对不相邻边交点的连线上（图22-2-1 表示边 A_5A_6 变成了切线）．

对偶地，如果外切六线形的某两条相邻边重合，则这两条边决定的顶点变为切点，六线形变为五线形而得到以下定理．

定理22.3′ 对于外切于非退化二级曲线的五线形，一条边的切点与其对顶点的连线必通过其余两对不相邻顶点的连线的交点（图 22-2-2 表示 a_5, a_6 决定的顶点变成了切点）．

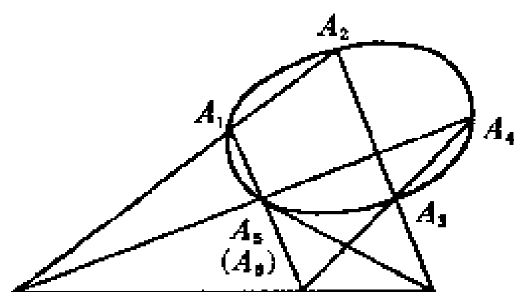


图 22-2-1

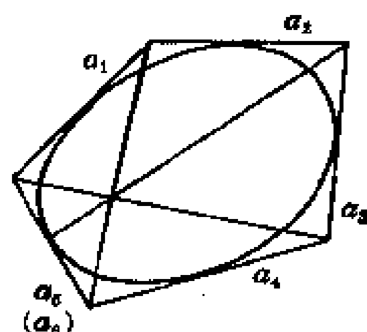


图 22-2-2

如果有两对相邻元素重合，则得到巴斯加定理与布利安桑定理关于四点形与四线形的情况，在每种情况里各有两个定理，我们只写出关于四点形的定理 22.4, 22.5．

定理22.4 内接于一个非退化二阶曲线的简单四点形的两对对边的交点及对顶点的切线的交点必四点共线(图 22-3-1)。

定理22.5 设一简单四点形内接于一个非退化二阶曲线，则其一对对边的交点与另一对边中每边与其相应对顶点（指在前一对边中同一边上)的切线的两个交点必三点共线（图 22-3-2)。

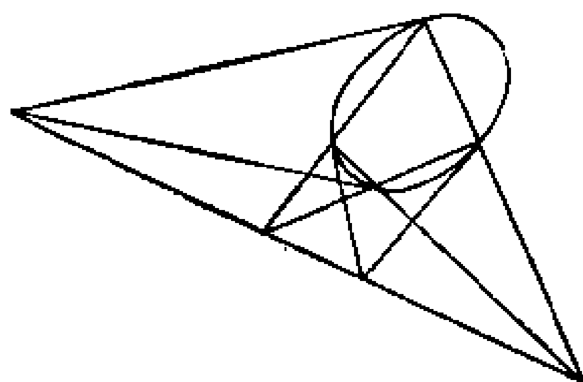


图 22-3-1

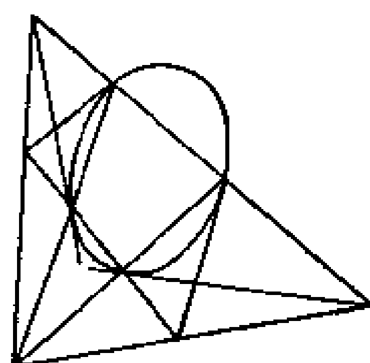


图 22-3-2

如果有三对元素重合，则得到巴斯加定理与布利安桑定理关于三点形与三线形的情况，各有一个定理.

定理22.6 设一个三点形内接于一个非退化二阶曲线，则其每顶点的切线与对边的交点必共线(图 22-4-1)。

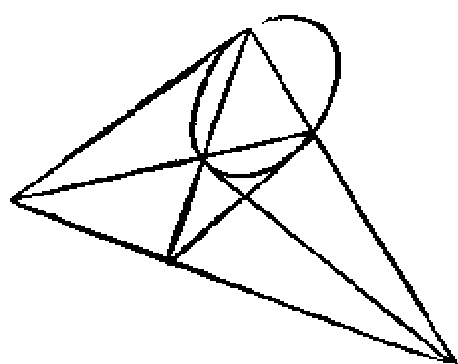


图 22-4-1

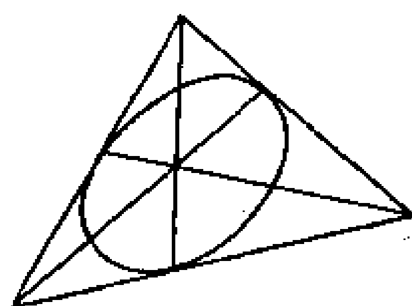


图 22-4-2

定理22.6′ 设一个三线形外切于一个非退化二级曲线，则其每边的切点与对顶点的连线必共点(图 22-4-2)。

例 已知二阶曲线上五个点（无三者共线），如何作出其他点？

解 将五点编号为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5(图 22-5). 设 A_1A_2 与 A_4A_5 交于 L, 过 L 任作一直线 p, A_2A_3 交 p 于 M, A_3A_4 交 p 于 N, A_5M 与 A_1N 交于一点 P_6, 则根据定理 22.2 知 P_6 为二阶曲线上的点. 变动直线 p, 就得到二阶曲线上其他点.

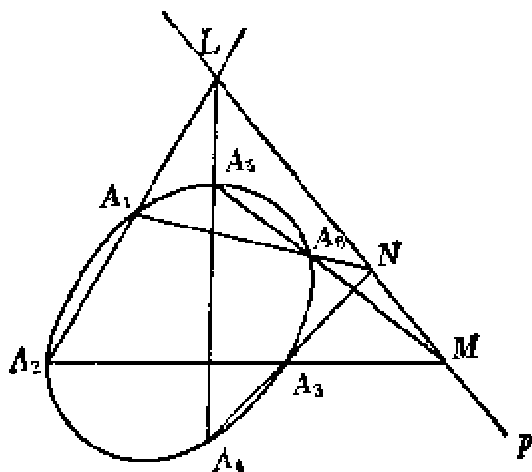


图 22-5

习 题

1. 写出关于四线形的定理 22.4′, 22.5′.

2. 写出本节例的对偶问题并解之.

3. 内接于圆的二个四点形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$. 设交点 $(AB\times A'B')=P$, $(BC\times B'C')=Q$, $(CD\times C'D')=R$ 在一直线上, 则交点 $(DA\times D'A')=S$ 在同一直线上.

4. 设共面三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 是透视的, 求证: 六直线 AB', AC', BC', BA', CA', CB' 属于一个二级曲线.

5. 已知一个二阶曲线上五个点, 求作其中一点的切线并考虑此问题的对偶.

6. 在二阶曲线上取六点, 问按照不同次序可以产生多少条巴斯加直线？

7. 设 A, B 在二阶曲线 c 上, C, D 不在 c 上, AC, BD 分别交 c 于 P、Q; AD, BC 分别交 c 于 U、V. 求证: CD, PQ, UV 共点.

§23 极点与极线、配极变换

本节引入关于二次曲线的重要概念——极点与极线，它们对以后的讨论起着重要作用.

在本节的讨论里，为了方便起见我们假定二次曲线是非退化的.

23.1 极点、极线的定义及求法

定义23.1 给定二阶曲线 c，点 P（不在 c 上），过 P 作直线与 C 交于 M_1, M_2，如果 Q 是直线 PM_1 上一点使 $(M_1M_2, PQ)=-1$，则称点 P 与 Q 关于二阶曲线 c 调和共轭或点 Q 与 P 关于 c 互为共轭点.

定理23.1 一定点关于一个二阶曲线的调和共轭点的轨迹是一条直线.

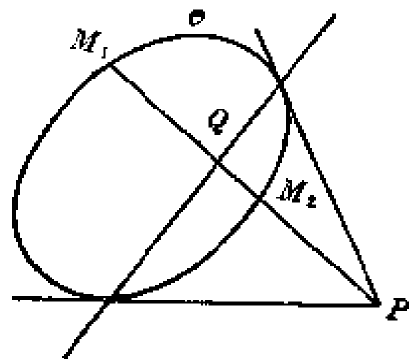


图 23-1

证明 设二阶曲线 c 的方程为

$$S=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j=0 \qquad (21.1)$$

点 $P(p_1, p_2, p_3)$ 为定点，点 $Q(q_1, q_2, q_3)$ 为动点与 P 关于 c 为共轭点. 则直线 PQ 上任意点的坐标可写为 $x_i=p_i+\lambda q_i (i=1, 2, 3)$.

将上式代入(21.1)则得到§21的(21.6)式

$$S_{qq}\lambda^2+2S_{pq}\lambda+S_{pp}=0$$

令此方程的二根为 λ_1, λ_2，则由于点偶 (p_i)，(q_i) 与 $(p_i+\lambda_1 q_i)$，$(p_i+\lambda_2 q_i)$ 调和共轭，故有 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=-1$，$\lambda_1+\lambda_2=0$. 根据二次方程根与

系数的关系，我们得到点 P, Q 关于二阶曲线 $S=0$ 调和共轭的充要条件是

$$S_{pq}=0$$

将(q)改写为变量(x)，则有 $S_p=0$ 或

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p x_1+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p x_2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p x_3=0 \tag{23.1}$$

故所求轨迹是一条直线.

推论 不在曲线上的二点 $P(p), Q(q)$关于二阶曲线 $S=0$ 为共轭点的充要条件是 $S_{pq}=0$.

定义23.2 直线(23.1)叫做点 $P(p)$关于二阶曲线(21.1)的极线；而点P叫做直线(23.1)的极点.

推论 不在二阶曲线上的点总有确定的极线.

将极线方程(23.1)与切线方程(21.7)比较，我们看到不在二阶曲线上的点的极线方程与二阶曲线上一点的切线方程完全一致. 因此我们规定对于二阶曲线上的点的极线为该点的切线，这样对于平面上任何点 $P(p)$关于二阶曲线 $S=0$ 都有确定的极线，其方程为(23.1).

推论 每条直线对于二阶曲线总有确定的极点.

证明 设直线方程为

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

如果有点(p_1, p_2, p_3)是它的极点，则将直线方程与(23.1)比较，有

$$\begin{cases}a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3=\alpha u_1\\ a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3=\alpha u_2\\ a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3=\alpha u_3\end{cases}$$

由于$|a_{ij}|\neq 0$，所以此方程组有唯一解.

例1 给定二阶曲线 c: $2x^2+4xy+6x+1=0$，求点 $P(1,2)$ 关于 c 的极线，x 轴关于 c 的极点.

解 所给二阶曲线齐次方程为 $2x_1^2+4x_1x_2+6x_1x_3+x_3^2=0$. 用矩阵写法为:

$$S\equiv(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&2&3\\2&0&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

点 $P(1,2,1)$的极线方程为

$$S_p=(1,2,1)\begin{pmatrix}2&2&3\\2&0&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

即
$$9x_1+2x_2+4x_3=0$$

设 x 轴关于 c 的极点为(x_1^0, x_2^0, x_3^0)，要求极点只需解方程组

$$\begin{pmatrix}2&2&3\\2&0&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\\x_3^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

解之得 $x_1^0=2, x_2^0=7, x_3^0=-6$. 所求极点为$(2,7,-6)$.

23.2 配极原则

定理23.2(配极原则) 如果P点的极线通过 Q，则Q点的极线也通过 P.

证明 设二阶曲线方程为 $S=0$，P 点的坐标为(p_i)，Q点的坐标为(q_i).

则P点的极线为 $S_p=0$, Q点的极线为 $S_q=0$.

因P点的极线通过 Q, 所以 $S_{pq}=0$.

但 $S_{pq}=S_{qp}$, 所以 $S_{qp}=0$, 所以Q点的极线通过P.

这个定理当然也可以叙述为: 如果直线 p 的极点在 q 上，则直

线q的极点也在p上. 我们看到，由于利用了简单记法，使得定理的证明十分简捷.

推论 1 两点连线的极点是此二点极线的交点；两直线交点的极线是此二直线极点的连线.

推论 2 共线点的极线必共点；共点线的极点必共线.

定义23.3 互相通过对方极点的二直线叫做关于二阶曲线的共轭直线.

例 2 设PA, PB为二阶曲线的切线，其中A, B为切点，则AB为P的极线(图 23-2).

证明 因点A在二阶曲线上，所以A的极线就是A的切线.

由于A的极线通过P，据定理 23.2 知P的极线通过A. 同理P的极线通过B. 因此AB是P的极线.

反过来，不难证明如果点P的极线与二阶曲线交于两个实点A, B. 则PA, PB是二阶曲线的切线.

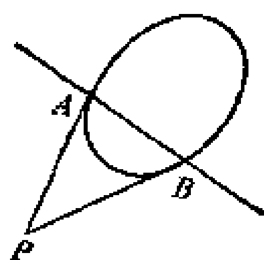


图 23-2

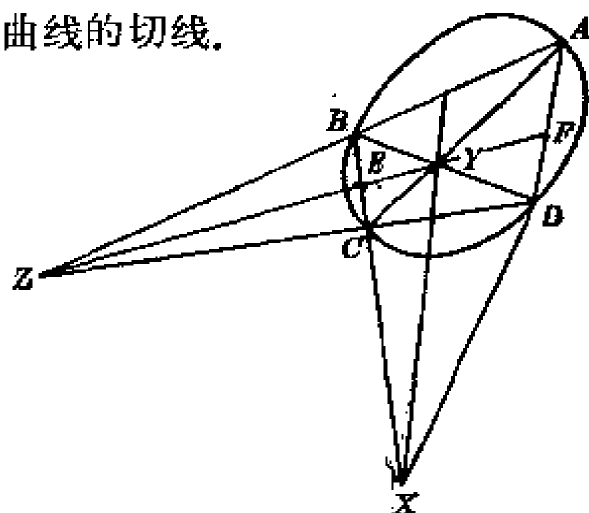


图 23-3

例 3 设一个完全四点形的四个顶点在一个二阶曲线上，则这个完全四点形的对边三点形的顶点是其对边的极线.

证明 如(图 23-3)，XYZ是完全四点形$ABCD$的对边三点形. 则

$$(BC, XE) = -1$$

$$(AD, XF) = -1$$

所以，E, F 都是 X 关于二阶曲线的调和共轭点.

因此 YZ 是 X 的极线，同理 XY 是 Z 的极线. 再根据定理 23.2 推论 1，得到 XZ 是 Y 的极线.

如果有一个三点形，(如例 3 的 XYZ) 三个顶点都是对边的极点，则此三点形叫做自极三点形(自共轭三点形).

注意：以上是由二阶曲线出发说明极点、极线的定义及求法. 如果给定一个二级曲线，应该如何考虑极点、极线的概念及求法呢？当然可以用定理 21.3 的理论将二级曲线方程化为二阶曲线方程来求，但实际上是不必要的，这是由于从二级曲线出发，有与以上的论述对偶的一套理论，现简要说明如下：

首先，与图 23-1 对偶可以画出图 23-4. 给定二级曲线 c 与直线 p(不属于 c). 在 p 上取点 L, m_1, m_2 为通过 L 且属于 c 的直线，如果 $(m_1m_2, pq) = -1$，则称直线 p 与 q 关于二级曲线 c 调和共轭或直线 q 与 p 关于 c 互为共轭直线.

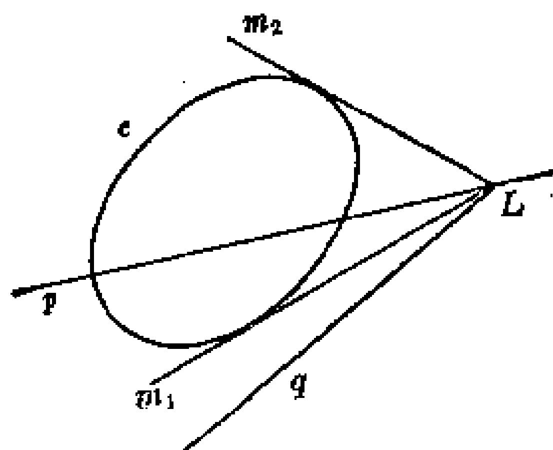


图 23-4

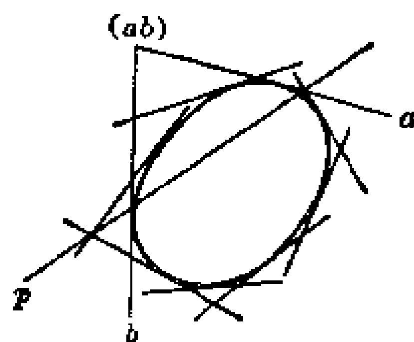


图 23-5

其次，可以证明，当在 p 上变动 L 的位置时，p 的共轭直线通过同一点，这个点称为直线 p 关于二级曲线 c 的极点，而直线 p 称为该点的极线. 又如果二级曲线 c 的方程为

$$T \equiv \Sigma a'_{ij} u_i u_j = 0$$

直线 p 的坐标为$[p_1, p_2, p_3]$，则 p 的极点方程为 $T_p=0$，再者与例2对偶有：如果 a, b 是以 p 上的点为切点且属于 c 的直线，则 a, b 的交点即为 p 的极点.

由此可见，关于二级曲线来说，极点的概念与求法与关于二阶曲线，极线的概念与求法是对偶的，而关于二级曲线，极线的求法则与关于二阶曲线，极点的求法相同.

最后指出，给定一个二次曲线，对于一个点，求其极线以及对于一条直线，求其极点，则无论对于这个二次曲线的点方程或线方程来说，其结果都是一致的.

23.3 配极变换

对于非退化二阶曲线来说，平面上的极点与极线构成点与直线之间的一一对应，在这个一一对应之下，使得平面上每个由点与直线所组成的图形 F 对应另一个由直线与点组成的图形 F'，叫做 F 关于已知二阶曲线的配极图形. 例如点列的配极图形是线束，二阶曲线的配极图形是二级曲线.

如果图形 F' 是图形 F 的配极图形，则图形 F 也是图形 F' 的配极图形. 所以这样的一对图形叫做互相配极的(互相共轭的). 特殊地，如果一个图形与它的配极图形重合，则此图形叫做自配极的(自共轭的). 如例 3 中的自极三点形是自配极图形的特例.

平面内一点与关于一个非退化二阶曲线的极线相对应. 这种一一对应叫做配极变换.

设 $P(x_1, x_2, x_3)$ 的极线是$[u_1, u_2, u_3]$，则由(23.1)得

$$\rho u_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \quad (a_{ij}=a_{ji},\ i=1, 2, 3)$$

由于 $|a_{ij}|\neq 0$，这是非奇线性对应，所以共线四点的交比等于它们对应极线(共点四直线)的交比.

配极变换是一般的点线变换的特殊情况．一般的点线变换为形如

$$\rho u_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \qquad (i=1,2,3)$$

的变换，我们也假定$|a_{ij}| \neq 0$，它与配极变换的差别在于不要求$a_{ij} = a_{ji}$.

点线变换与配极变换的关系与§13，§14所论一维射影变换与对合的关系类似，而现在是二维情况，配极变换有时也称为对合的射影变换．

习　　题

1．求极线：

(1) 点$(1, -1, 0)$关于二阶曲线

$$3x_1^2+5x_2^2+x_3^2+7x_1x_2+4x_1x_3+5x_2x_3=0$$

(2) 点$(5, 1, 7)$关于二阶曲线

$$2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3=0$$

2．求极点：

(1) 直线$3x_1-x_2+6x_3=0$关于

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3=0$$

(2) 直线$x_1-x_2+3x_3=0$关于

$$2x_1^2-3x_2^2-5x_3^2+6x_1x_2+3x_1x_3+16x_2x_3=0$$

3．求点$(2, -1, 1)$关于二级曲线$4u_1^2+2u_3^2+u_2u_3=0$的极线．

4．求$x^2+y^2=k^2$的动切线关于$ax^2+by^2=1$的极点的轨迹．

5．如图23-6，$ABCD$是二阶曲线的内接四点形，XYZ是对边三点形．求证：B，C处的切线交在YZ上，A，D处的切线也交在YZ上．

6．如图23-7 ABC是自极三点形，弦RP通过B，RC与曲线的另一个交点为Q，求证：PQ通过A．

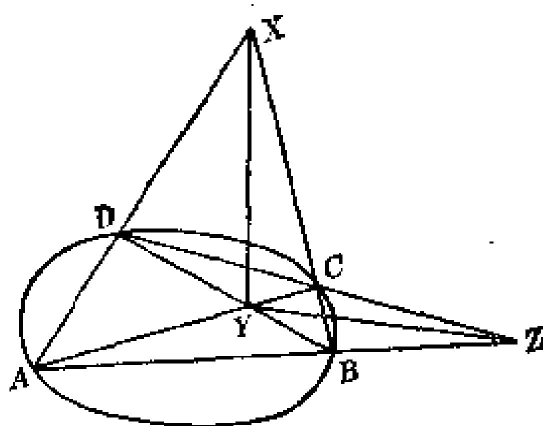


图 23-6

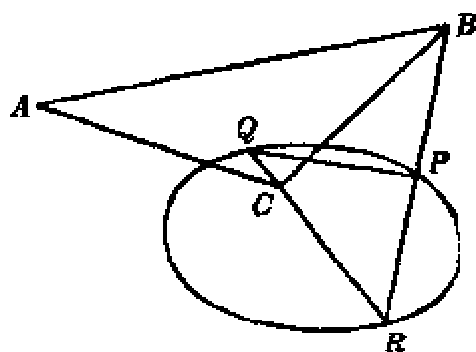


图 23-7

7. 设 $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ 分别为 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ 的极线(关于二阶曲线 $S=0$). 求证: AA' 的方程为 $S_{ac}S_b - S_{ab}S_c = 0$, 并由此证明三点形 ABC 与 $A'B'C'$ 透视.

8*. 二次曲线的内接三点形 ABC, 由顶点作切线构成外切三点形 $A'B'C'$。从任一点 S 向 A, B, C 引直线交对边于 A_1, B_1, C_1, 求证 $A'A_1, B'B_1, C'C_1$ 交于一点.

9*. 给定二阶曲线 c, 求证: 任何直线(不是切线)上关于 c 有无限多共轭点偶且在直线上形成对合.

10. 根据巴斯加定理证明布利安桑定理.

11. 求证: p, q 两直线关于非退化二阶曲线 $\sum a_{ij}x_ix_j = 0$ 为共轭直线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

12. 根据例 3, 说明不在二阶曲线上一点极线的作图法, 由此推出过不在二阶曲线上一点切线的作图法.

§24 二阶曲线的射影分类

本节讨论一般二阶曲线(包括退化情况)的分类, 所用的方法是选取适当的坐标系以化简其方程.

24.1 二阶曲线的奇异点

定义24.1 给定二阶曲线 $S \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0$，则满足条件

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)_p = 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_p = 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)_p = 0$$

的点 $P(p_1, p_2, p_3)$ 叫做 $S=0$ 的奇异点.

显然二阶曲线非退化的充要条件是无奇异点，退化二阶曲线必有奇异点. 详细情况如下：

当 (a_{ij}) 秩等于 3 时，$S=0$ 无奇异点.

当 (a_{ij}) 秩等于 2 时，$S=0$ 有唯一奇异点.

当 (a_{ij}) 秩等于 1 时，$S=0$ 有无穷多奇异点，在一直线上.

关于奇异点的几何意义见习题 4.

以前我们只对非退化二阶曲线定义了极点与极线，现在考虑退化情况.

如果二阶曲线退化为二不同直线 m_1，m_2，相交于 $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$（图 24-1），则 P_0 就是奇异点（见习题 4）. 所以

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0 = 0 \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0 = 0 \\ a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24.1)$$

由(24.1)式可以解出 x_1^0，x_2^0，x_3^0.

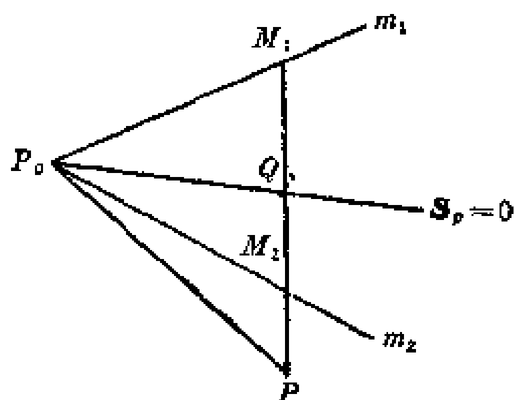


图 24-1

对于不同于 P_0 的点 P，其极线的定义与定义 23.1 里所讲的相同. 因此其方程仍为 $S_p=0$，这是一条通过 P_0 的直线. 这一结论也可以直接从以下事实得到，如果 $(PQ, M_1M_2)=-1$，则 Q 的轨迹是 P_0P 关于 m_1，m_2 的调和共轭线.

P_0 点的极线是不定的.

除 P_0 外直线 P_0P 上的所有点有相同的极线，所以通过 P_0 的直线的极点是不定的. 对于不通过 P_0 的直线，由于其上点的极线通过 P_0，所以这种直线的极点就取为 P_0.

总之，对于退化二阶曲线，极点与极线不是一一对应的，奇异点的极线以及通过奇异点的直线的极点都是不定的.

24.2 二阶曲线的射影分类

$$给定 \qquad S \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0 \qquad (a_{ij}=a_{ji}) \qquad (24.2)$$

分以下几种情况讨论.

一、$|a_{ij}|\neq 0$ 即(a_{ij})秩是 3. 这时二阶曲线是非退化的，必存在自极三点形. 事实上，我们可以任取 A_3' 不在二阶曲线上，在 A_3' 的极线上取不在二阶曲线上的点 A_1'，则 A_1' 的极线必通过 A_3'，令 A_1' 的极线与 A_3' 的极线的交点为 A_2'，则 A_2' 的极线必为 $A_1'A_3'$，所以关于给定的二阶曲线，$A_1'A_2'A_3'$ 是一个自极三点形.

现在取顶点不在二阶曲线上的一个自极三点形 $A_1'A_2'A_3'$ 作为新的坐标三点形，再取不在坐标三点形边上的一点为单位点，而建立一个新的射影坐标系. 因为两种坐标间的变换为线性的，故(24.2)式在新坐标系之下化为

$$\sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij}x'_ix'_j=0 \qquad (a'_{ij}=a'_{ji}) \quad (24.3)$$

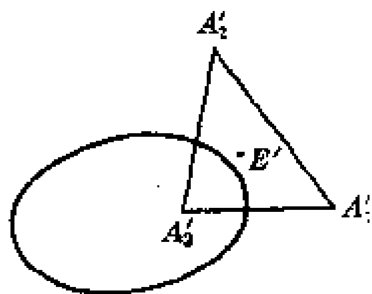


图 24-2

因为 $A_1'(1,0,0)$的对边是 $A_2'A_3'$，所以它的方程为

$$x_1'=0 \qquad (24.4)$$

另一方面，$A_1'(1,0,0)$的极线是

$$a'_{11}x'_1+a'_{12}x'_2+a'_{13}x'_3=0 \tag{24.5}$$

因为方程(24.4)与(24.5)表示同一直线，所以必须有

$$a'_{12}=0,\quad a'_{13}=0,\quad a'_{11}\neq 0$$

同理 $\quad a'_{23}=0,\quad a'_{22}\neq 0,\quad a'_{33}\neq 0$

故方程(24.3)化为

$$a'_{11}x'^2_1+a'_{22}x'^2_2+a'_{33}x'^2_3=0 \tag{24.6}$$

再作坐标变换

$$\rho x'_i=\frac{1}{\sqrt{|a'_{ii}|}}x''_i \qquad (i=1,2,3)$$

这实际上是一个不改变坐标三点形 $A'_1A'_2A'_3$ 而只改变单位点的变换，通过它方程(24.6)化为

$$\pm x''^2_1\pm x''^2_2\pm x''^2_2=0 \tag{24.7}$$

由于 x_1, x_2, x_3 三个坐标的地位相同，故方程(24.7)只有下列两种情况：

$$\begin{aligned}x''^2_1+x''^2_2-x''^2_3=0\\x''^2_1+x''^2_2+x''^2_3=0\end{aligned} \tag{24.8}$$

方程(24.8)的第一个表示实二阶曲线，也称为长圆曲线；方程(24.8)的第二个表示虚二阶曲线，其上无实点，也称为零曲线.

二、$|a_{ij}|=0$ 且(a_{ij})的秩是 2. 这时二阶曲线是退化的，但只有一个奇异点，我们就取奇异点作为新坐标三点形的顶点 $A'_3(0,0,1)$. 取不在曲线上的一点 $A'_2(0,1,0)$. 则 A'_2 的极线必通过 A'_3. 再于 A'_2 的极线上取不在曲线上的点作为 $A'_1(1,0,0)$.

现在以 $A'_1A'_2A'_3$ 为新的坐标三点形，再取单位点而建立一个新的射影坐标系. 设(24.2)式在新坐标系之下化为

$$S'\equiv\sum_{i,j=1}^{3}a'_{ij}x'_ix'_j=0 \qquad (a'_{ij}=a'_{ji}) \tag{24.9}$$

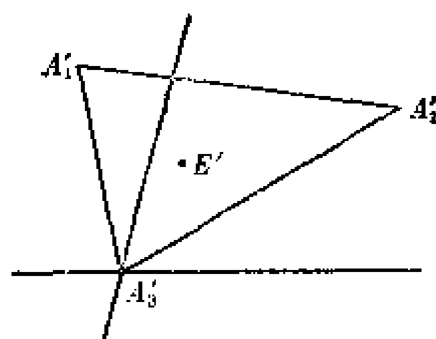


图 24-3

由于 $A'_3(0,0,1)$坐标满足 $\frac{\partial S'}{\partial x'_1}=\frac{\partial S'}{\partial x'_2}=\frac{\partial S'}{\partial x'_3}=0$，故有

$$a'_{13}=a'_{23}=a'_{33}=0$$

由于 A'_1, A'_2 的取法有 $a'_{11}\neq 0, a'_{22}\neq 0, a'_{12}=0$. 所以方程(24.9)化为

$$a'_{11}x'^2_1+a'_{22}x'^2_2=0 \qquad (24.10)$$

再作坐标变换

$$\rho x'_i=\frac{1}{\sqrt{|a'_{ii}|}}x''_i \quad (i=1,2)$$

$$\rho x'_3=x''_3$$

则方程(24.10)化为

$$\pm x''^2_1\pm x''^2_2=0 \qquad (24.11)$$

由于 x_1, x_2 两坐标的地位相同，所以方程(24.11)只有下列两种情况:

$$\left.\begin{array}{l} x''^2_1-x''^2_2=0 \\ x''^2_1+x''^2_2=0 \end{array}\right\} \qquad (24.12)$$

方程(24.12)的第一个表示一对实直线 $x''_1+x''_2=0$ 和 $x''_1-x''_2=0$. 方程(24.12)的第二个表示一对虚直线 $x''_1+ix''_2=0, x''_1-ix''_2=0$.

三、$|a_{ij}|=0$ 且(a_{ij})的秩是 1. 这时二阶曲线是退化的，但有一直线其上的点都是奇异点. 我们就以此直线作为新坐标三点形的一边 $x'_1=0$, 来建立一个新的射影坐标系，设(24.2)式在新坐

标系下化为

$$\sum_{i,j=0}^{3} a'_{ij}x'_i x'_j = 0 \qquad (a'_{ij} = a'_{ji})$$

由于不论 $p_2, p_3(p_2^2+p_3^2 \neq 0)$值如何，点$(0, p_2, p_3)$为奇异点，故有 $a'_{11} \neq 0, a'_{12} = a'_{13} = a'_{22} = a'_{23} = a'_{33} = 0$.

因此在新坐标系下方程是

$$x_1'^2 = 0 \qquad (24.13)$$

此方程表示一对重合直线.

通过以上讨论，我们看到，选取适当的坐标系，可使方程(24.2)化为(24.8)或(24.12)或(24.13)，这些方程叫做二阶曲线的标准方程，共代表五类曲线.

最后指出，不通过坐标变换也可以知道方程(24.2)表示五类曲线中的哪一类，这就是利用不变量的分类法. 我们知道，(24.2)里方阵(a_{ij})的秩数是坐标变换下的不变量，这样通过计算二阶曲线在某一坐标系下的方程系数方阵的秩数，就能知道它可以化为三组标准方程的哪一组. 又方程(24.2)左端的符号差也是它的一个不变量. 所谓符号差就是二次齐式的标准式里正项数与负项数的差数. 例如 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, x_1^2-x_2^2=0$ 的符号差分别为 1,0. 如果知道了一个二阶曲线在某坐标系下的方程，根据线性代数的理论就可以利用它的方阵中的主子式来确定符号差[*]. 这样由于符号差的不同就能知道二阶曲线方程化为组中的哪一个标准方程.

因此二阶曲线方程的系数方阵的秩数和符号差组成它的不变量的完全系统. 于是利用不变量的完全系统得到二阶曲线的分类如下:

---

* 参看: Bocher 著 Introduction to Higher Algebra.

标准方程	表示曲线	秩	符号差
$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	实二阶曲线	3	1
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	虚二阶曲线	3	3
$x_1^2-x_2^2=0$	一对实直线	2	0
$x_1^2+x_2^2=0$	一对虚直线	2	2
$x_1^2=0$	一对重合直线	1	1

总之，在射影平面上二阶曲线的集合在射影群之下分为五个射影类，同一类里的两个曲线射影等价，也就是有某个射影变换将一条曲线变为另一系曲线，而不同类的任意两条曲线不射影等价.

例 判定二阶曲线 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3+2x_1x_3-6x_1x_2=0$ 的类型.

解一 已知二阶曲线

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3+2x_1x_3-6x_1x_2=0$$

和三点 $P(0,1,1)$，$Q(1,0,1)$，$R(1,1,0)$. 不难证明三点形 PQR 为自极三点形.

现在取 PQR 为坐标三点形而建立坐标变换（如果理解为点变换，就是 P、Q，R 的象分别为(1，0，0)，(0，1，0)，(0，0，1).）得：

$$\begin{cases}\rho x_1'=k_1(x_1-x_2-x_3)\\ \rho x_2'=k_2(-x_1+x_2-x_3)\\ \rho x_3'=k_3(-x_1-x_2+x_3)\end{cases}$$

如果取新、旧坐标系的单位点相同，则有

$$k_1=k_2=k_3$$

因此有

$$\begin{cases}\lambda x_1=x_2'+x_3'\\ \lambda x_2=x_1'+x_3'\\ \lambda x_3=x_1'+x_2'\end{cases}$$

将此式代入原方程，得知其在新坐标系下化为

$$x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2=0$$

因此所给方程表示实二阶曲线。

解二 以上是用坐标变换法判定二阶曲线的类型。现再用不变量法判定如下：

首先计算

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的秩 $r=3$，然后考虑(a_{ij})的主子式序列：

$$D_0=1,\quad D_1=1,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=-8$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-16$$

则主子式序列里连号数与变号数的差数就是二次方程左端的符号差。因此符号差是 $2-1=1$，（因连号数是 2，变号数是 1。）由所求得的秩与符号差得知所给方程表示实二阶曲线。

我们看到不变量的判定法的优点在于避免了坐标变换的演算。

习　　题

1. 化下列二阶曲线方程的标准方程。

（1）$2x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2+6x_2x_3-4x_1x_3=0$

（2）$4x_1^2+15x_2^2-5x_3^2+16x_1x_2-22x_2x_3-8x_1x_3=0$

（3）$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=0$

（4）$x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+12x_2x_3+6x_1x_3=0$

2. 如果坐标三点形是由二阶曲线的二切线与切点的连线所构成的，求

证：曲线方程可写为

$$c_1x_1x_3+c_2x_2^2=0$$

3. 如果两个非退化二阶曲线相交于四点．求证：两曲线的方程可以写作 $a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2=0(a_1a_2a_3\neq0)$ 与 $b_1x_1^2+b_2x_2^2+b_3x_3^2=0(b_1b_2b_3\neq0)$．

4. 求证：二阶曲线上一点是奇异点的充要条件是它与曲线上任何点连线上的点皆在此曲线上。

*§25 二阶曲线上的射影变换与对合

在第二章讨论过直线上的射影变换与对合，现在讨论实的非退化二阶曲线上的射影变换与对合．

25.1 二阶曲线上的射影变换

定义 25.1 如果在二阶曲线的点之间建立了一一对应，使得二阶曲线上任意一点与对应点相连所构成的两个线束是射影对应的，则称在二阶曲线上建立了射影变换．二阶曲线叫做底．

如图 25-1，如果 $O(A,B,C,\cdots)\barwedge O(A',B'C',\cdots)$，则 $A\to A'$，$B\to B'$，$C\to C'$，…为射影变换，记作 $(A,B,C,\cdots)\barwedge(A',B',C',\cdots)$，也称它们为二阶曲线上的射影点列．

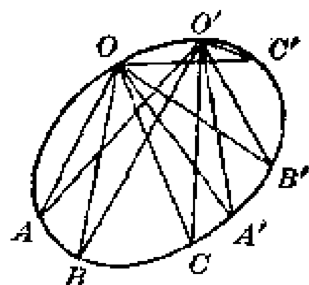


图 25-1

必须证明，射影变换与二阶曲线上的点 O 取法无关．事实上，若有 $O(A,B,C,\cdots)\barwedge O(A',B',C'\cdots)$，则对于另一点 O'，有 $O'(A,B,C,\cdots)\barwedge O(A,B,C,\cdots)\barwedge O(A',B',C',\cdots)\barwedge O'(A',B',C'\cdots)$．所以有 $O'(A,B,C,\cdots)\barwedge O'(A',B',C',\cdots)$．

由定义立即得到以下定理．

定理 25.1 二阶曲线上的射影变换由三对对应点唯一决定．

现在设已知三对对应点 A,A'；B,B'；C,C'．取 A 与 A' 为线

束的中心，则有 $A(A',B',C')\overline{\wedge}A'(A,B,C)$. 因此 $A(A',B',C')\overline{\wedge}A'(A,B,C)$. 这样我们得到：已知三对对应点，二阶曲线上的射影变换的对应点的作图法. 如图 25-2, 我们先作出以 A, A' 为中心

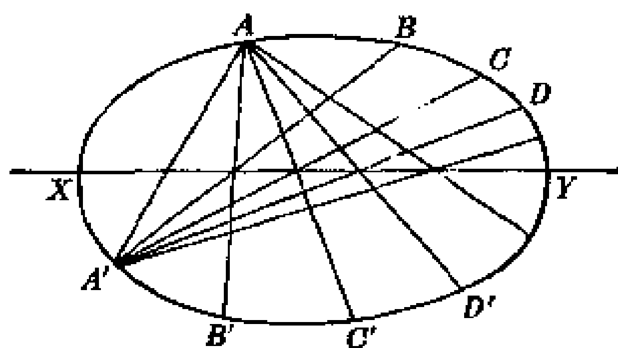


图 25-2

的透视线束的透视轴，这只须作出直线 AB' 与 $A'B$ 的交点以及直线 AC' 与 $A'C$ 的交点，再连结这两个交点，所得直线即在透视轴. 然后对于曲线上任意点 D，我们只须从 A' 点把 D 点投射到透视轴上，再从 A 点把这个点投射到曲线上就得到点 D 的对应点 D'.

我们注意到，线束 $A(A',B',C',\cdots)$, $A'(A,B,C,\cdots)$ 的透视轴与二阶曲线的交点 X, Y 是二阶曲线上射影变换下的不变点，因为从以上的作图法显然有：当曲线上的各点 P 落在透视轴上时，则与它对应的点就与它重合，这就是说，点 P 变成它自己. 在图 25-2 里也可以看到，当曲线上的点变动趋于 X 或 Y 时，它的对应点也趋于 X 或 Y.

以上我们取 A, A' 为二线束的中心而得到透视轴，如果取另一对对应点为中心投射曲线上的点而得到二透视线束，则透视轴必与前者重合. 事实上，设由直线 $A'B$ 与 $B'A$ 的交点以及直线 $A'C$ 与 AC' 的交点所决定的透视轴为 S_a, 然后我们再取点 B 与 B' 作为投射曲线上对应点的线束中心，设这两个线束的透视轴为 S_b, 则 S_b 是由直线 $B'A$ 与 BA' 的交点以及直线 $B'C$ 与 BC' 的交点所决定. 在图 25-3 里，观察六点形 $AC'BA'CB'$, 根据巴斯加定理得

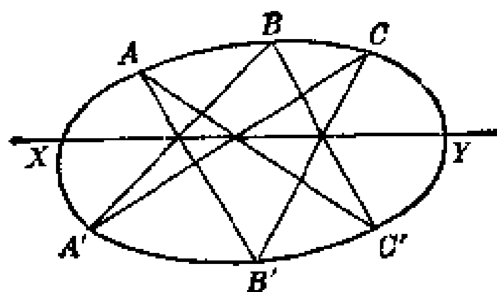


图 25-3

到 AC' 与 $A'C$ 的交点，$C'B$ 与 CB' 的交点，BA' 与 $B'A$ 的交点三点共线，从而 S_a 与 S_b 重合．因此，以任何一对对应点为线束中心所得到的透视轴叫做二阶曲线上射影变换的透视轴（射影轴）．

至此我们得到：

定理 25.2 如果给了二阶曲线上的一个射影变换，则对于任意两对对应点 M, M' 与 N, N'，直线 MN' 与 $M'N$ 的交点总在一条确定的直线上，这条直线就是已知变换的透视轴．

因此，关于讨论二阶曲线上的射影变换的不变点的问题就是透视轴与曲线交点的问题．一共有三种可能情况，在图 25-3 里所表示的有两个不变点 X 与 Y，这种变换称为双曲射影变换；在图 25-4 里表示的只有一个不变点 X，这种变换称为抛物射影变换；在图 25-5 里表示没有实的不变点，这种变换称为椭圆射影变换．

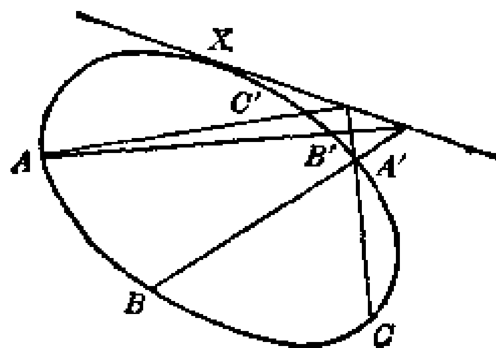


图 25-4

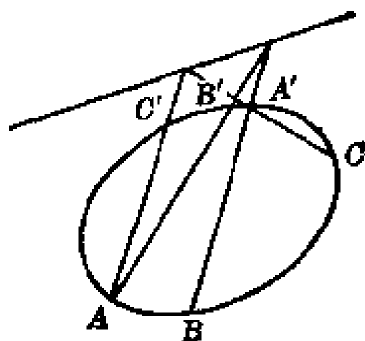


图 25-5

25.2 二阶曲线上的对合

二阶曲线上的对合是二阶曲线上射影变换的特殊情况.

定义 25.2 如果在二阶曲线上的点之间建立了非恒等的一一对应，在曲线上任取一点为中心与曲线上对应点连线构成两个线束，如果这两个线束是对合的，则称在二阶曲线上所建立的对应是对合.

不难证明，对合的定义与线束中心的取法无关.

由定义立即得以下定理.

定理 25.3 二阶曲线的对合由两对对应点唯一决定.

现在取对合的两对对应点 A, A' 与 B, B'，再取 $C \equiv A'$，则 $C' \equiv A$，因此六点形 $AC'BA'CB'$ 变成了四点形 $AABA'A'B'$，所以透视轴就是 $A'B$ 与 AB' 的交点与 A, A' 处两切线交点的连线. 但透视轴是唯一的，故 B, B' 处切线的交点也在透视轴上. 在对合之下，透视轴称为对合轴，显然对合轴也可以由两对对应点切线的交点而唯一确定. 又作出对合轴后，对曲线上任意点都可作出它的对应点.

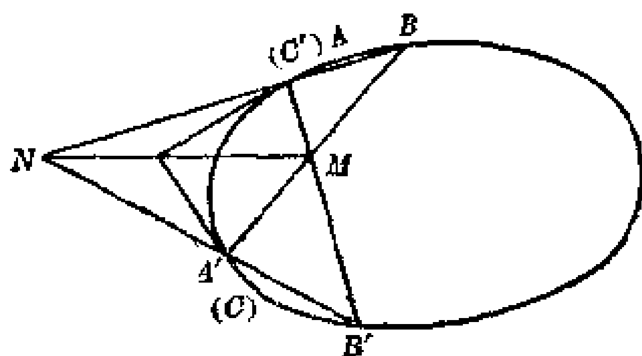


图 25-6

对合轴与二阶曲线的交点(对合的不变点)也有三种可能情况. 有两个交点，这时对合称为双曲型的；没有实交点，这时对合称为椭圆型的；有一个交点，对这种情况即对合轴与二阶曲线相切，记交点为 T，则过 T 的任意直线与二阶曲线的交点都是它的对

应点，这就是说，曲线上所有点都是T的对应点，因此对应不是一一的．所以对合只有双曲、椭圆两种类型．

最后再证明二阶曲线对合的一个重要性质，它说明二阶曲线上的对合与直线上对合的类似之处．

定理 25.4 双曲型对合的任意一对对应点与两个不变点调和共轭．（即与曲线上另一点相连所得四直线调和共轭．）

证明 设P, P'为对合的任一对对应点，X, Y为两个不变点．则

$$(XY, PP') = (XY, P'P)$$

又

$$(XY, PP') = (XY, P'P) = \frac{1}{(XY, PP')}$$

$$(XY, PP')^2 = 1$$

但是$(XY, PP') \neq 1$，因此

$$(XY, PP') = -1$$

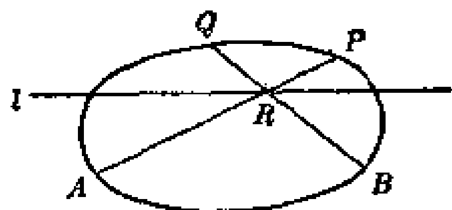


图 25-7

例 如图 25.7，A, B是二阶曲线上的二定点，P为其上动点，l是固定直线，PA交l于R，BR交曲线于Q．求证：(P)与(Q)为二阶曲线上的射影点列．

证明 因A，B在二阶曲线上，所以由二阶曲线的射影定义有

$$线束\ A(Q) \barwedge 线束\ B(Q)$$

又根据题设有

$$线束\ A(P) \barwedge 点列(R) \barwedge 线束\ B(Q)$$

因此

$$线束\ A(P) \barwedge 线束\ A(Q)$$

即(P)与(Q)是二阶曲线上的射影点列，其不变点是直线l与曲线的交点．

思考：作为直线族 PQ 的包络的曲线是什么？

习　题

1. 二阶曲线上的射影点列的对偶是什么？

2. 从一点到二阶曲线的二条切线与一条割线. 求证：两个切点与两个交点调和共轭.

3. 求证：二阶曲线对合的每一对对应点的连线通过一定点（叫做对合中心），反之，过定点的任意直线交二阶曲线于对合对应点.

4. 设 A 是两个二阶曲线 c、c' 的一个交点. PQ 是 c 的通过定点 O 的弦，AP，AQ 分别交 c 于 P'，Q'，求证：$P'Q'$ 通过一个定点（图 25-8）.

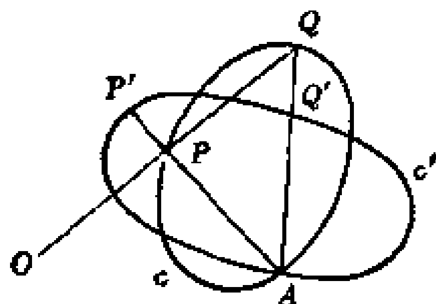


图　25-8

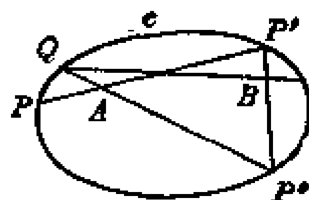


图　25-9

提示：用前题.

5. 设 PP'，$P'P''$ 是分别通过定点 A，B 的二阶曲线 c 的动弦.

求证：点列 (P) 与 (P')，(P') 与 (P'') 都是二阶曲线上的对合点列. 问 (P) 与 (P'') 是否一定为对合点列（图 25-9）？

第六章　二次曲线的仿射理论与度量理论

我们知道，仿射变换是使无穷远直线保持不变的射影变换. 本章首先以无穷远直线为基础讨论二阶曲线的中心、直径、渐近线等几个仿射概念并对二阶曲线进行仿射分类. 本章后一部分引入圆环点与迷向直线，并以它们为基础讨论二阶曲线的主轴、焦点、准线等几个度量概念. 最后简单介绍共焦二次曲线束.

§26　二阶曲线的中心、直径、渐近线

首先讨论在仿射平面内二阶曲线与无穷远直线的相关位置. 给定

$$S \equiv \sum_{i,\ j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0 (a_{ij}=a_{ji}) \tag{26.1}$$

现在求无穷远直线与(26.1)的交点. 为此将$x_3=0$代入(26.1)得到

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0 \tag{26.2}$$

由此解$\frac{x_1}{x_2}$得

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

所以当$a_{12}^2-a_{11}a_{22}$是正数、零、负数时，$\frac{x_1}{x_2}$分别有二不等实根、二相等实根、二虚根. 因此可以根据$A_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$的值将(26.1)所表示的曲线分类如下:

定义 26.1 当 A_{33} 的值是负数、零、正数时，我们把(26.1)表示的曲线顺次称为双曲型、抛物型、椭圆型曲线；且于(26.1)表示非退化二阶曲线亦即$|a_{ij}|\neq 0$时，把上述三种类型曲线顺次称为双曲线、抛物线、椭圆.

显然，双曲线、抛物线、椭圆与无穷远直线分别有两个实交点、一个实交点和两个共轭虚交点. 为了简便起见，以后我们就把二阶曲线与无穷远直线的交点称为曲线上的无穷远点. 因此有以下推论:

推论 一个非退化二阶曲线是抛物线的充要条件是无穷远直线是它的切线.

在本节，以下仅就非退化二阶曲线进行讨论，以保证极点与极线的一一对应关系.

26.1 中心

定义 26.2 无穷远直线关于一个二阶曲线的极点称为这个二阶曲线的中心.

由这个定义显然看出中心具有仿射性质，并且这种定义与欧氏几何里的中心定义:"平面上的一点使得二阶曲线上的点关于此点两两对称"是一致的. 事实上，如图 26-1，令无穷远直线的极点为 C，过 C 作直线与二阶曲线交于 P_1、P_2，与无穷远直线交于 P_∞，则有$(P_1P_2, CP_\infty)=-1$，由于 P_∞ 是无穷远点. 故 C 是 P_1P_2 中点. 反过来，如果 C 平分任何通过它的二阶曲线的弦，则 C 的极线是无穷远直线.

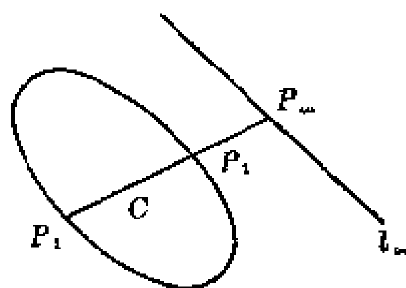


图 26-1

定理 26.1 双曲线、椭圆各有唯一中心且为有穷远点，而抛

物线的中心为无穷远点.

证明 设中心为 $C(c_1, c_2, c_3)$，则关于(26.1)，C 的极线为

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)_c x_1+\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_c x_2+\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)_c x_3=0$$

但 C 的极线为无穷远直线，故有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_1}\right)_c=0\\ \left(\dfrac{\partial S}{\partial x_2}\right)_c=0\end{cases} \tag{26.3}$$

所以 $$c_1:c_2:c_3=A_{31}:A_{32}:A_{33}$$

因此(26.1)当表示双曲线或椭圆时，中心为有穷远点，它的非齐次坐标为$\left(\dfrac{A_{31}}{A_{33}}, \dfrac{A_{32}}{A_{33}}\right)$，当表示抛物线时，中心为$(A_{31}, A_{32}, 0)$. 不难看出，抛物线的中心就是它与无穷远直线的切点. 又抛物线的中心可以写为$\left(1, -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}, 0\right)$或$\left(1, -\dfrac{a_{12}}{a_{22}}, 0\right)$(*). 图 26-2 表示三种二阶曲线与无穷远直线的位置关系以及中心情况. 以后把椭圆与双曲线称为有心二阶曲线，抛物线称为无心二阶曲线.

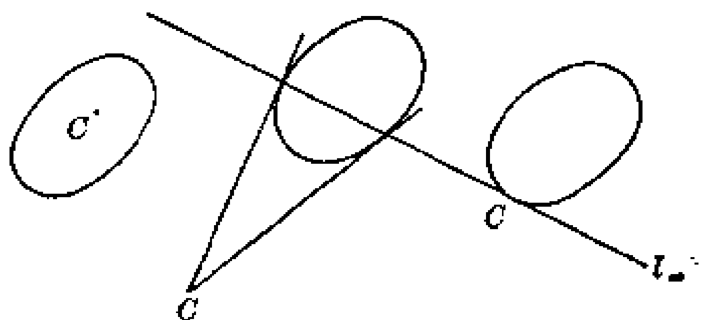


图 26-2

26.2 直径与共轭直径

定义 26.3 无穷远点关于一个二阶曲线的极线称为这个二

---

* 有的抛物线，如 $x^2=2py$ 除外.

阶曲线的直径.

根据定理 23.2 可知，直径的定义也可以叙述为：通过二阶曲线中心的直线称为直径.

推论 抛物线的直径互相平行.

这样定义的直径与欧氏几何里的直径定义也是一致的. 事实上，设一组平行弦的公共无穷远点为 P_∞，则当且仅当 Q 为某弦 AB 中点时，$(AB, QP_\infty)=(ABQ)=-1$. 所以这组平行弦中点的轨迹恰好是 P_∞ 的极线.

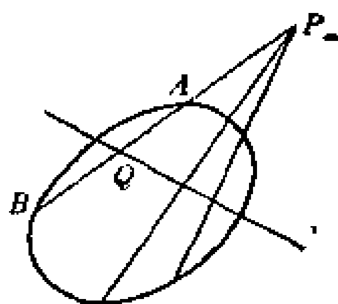


图 26-3

由于直径构成通过中心的线束，所以当(26.1)表示有心二阶曲线时，其直径方程可以写为

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}+k\frac{\partial S}{\partial x_2}=0 \qquad (26.4)$$

或

$$\mu\frac{\partial S}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial S}{\partial x_2}=0 \quad (\text{其中 } \mu、\lambda \text{ 不全为零}) \qquad (26.4)'$$

例如

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \text{ 即 } b^2x_1^2+a^2x_2^2-a^2b^2x_3^2=0$$

它的直径方程为

$$\mu 2b^2x_1+\lambda 2a^2x_2=0$$

当(26.1)表示抛物线时，其直径方程可以写为

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+bx_3=0 \qquad (\text{其中 } b \text{ 为参数})$$

或

$$a_{12}x_1+a_{22}x_2+bx_3=0 \qquad (\text{其中 } b \text{ 为参数})$$

定义 26.4 二阶曲线的一直径与无穷远直线交点的极线称为该直径的共轭直径.

由定义显然可见二直径共轭的关系是相互的. 又共轭直径的

定义也可以叙述为：通过中心的两条共轭直线称为共轭直径.

注意：抛物线无共轭直径，因此共轭直径的概念只用于有心二阶曲线. 与一对共轭直径平行的方向称为共轭方向，抛物线的直径与其所平分的弦的方向也称为共轭方向，但不是共轭直径.

现在定义的共轭直径也与过去一致，即有以下定理：

定理 26.2 与有心二阶曲线一直径平行的一组弦，被它的共轭直径所平分(图 26-4).

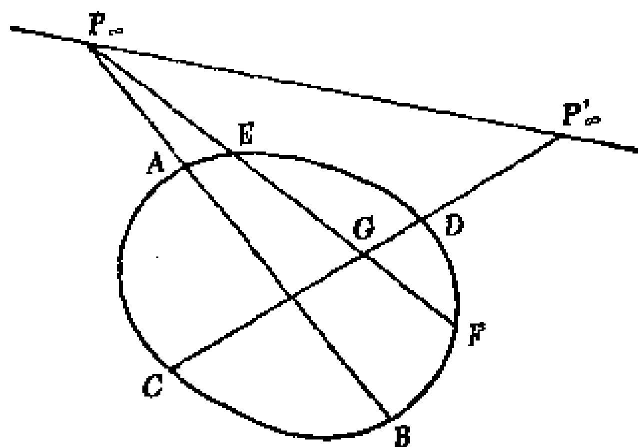


图 26-4

证明 设直径 AB 与 CD 共轭，直径 AB 的无穷远点 P_∞ 是 CD 的极点. 过 P_∞ 点引直线交曲线于 E, F，则有 $EF \parallel AB$，EF 交 CD 于 G，则根据极点极线的定义有

$$(EF, GP_\infty) = -1$$

所以 G 平分 EF，所以 CD 平分与 AB 平行的一组弦.

反过来，如果 CD 平分与 AB 平行的弦，则 CD 必为 AB 的共轭直径.

从图 26-4 还看到过 C, D 两点的切线必通过 CD 的极点，所以这两条切线平行于 AB. 由此导出推论：过一直径两端点的切线平行该直径的共轭直径.

例 1 如果一个平行四边形内接于一个有心二次曲线，求证：

它的两条对角线是二次曲线的直径，而且它的两边平行于一对共轭直径.

证明 如图26-5，把平行四边形 $ABCD$ 看作为完全四点形，这个四点形内接于二阶曲线，所以三个对角点组成自极三角形，有两个顶点是无穷远点. 所以 AC 和 BD 的交点 O 是无穷远线的极点. 也就是说 O 点是中心，所以两对角线 AC 和 BD 是直径，设 AD 和 BC 交于 P_∞，AB 和 CD 交于 Q_∞，则 OP_∞ 的极点是 Q_∞，P_∞ 是 OQ_∞ 的极点. 所以直径 OP_∞ 和 OQ_∞ 是共轭直径. 因此 AB 和 BC 平行于一对共轭直径.

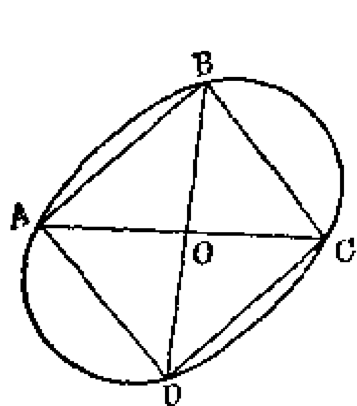


图 26-5

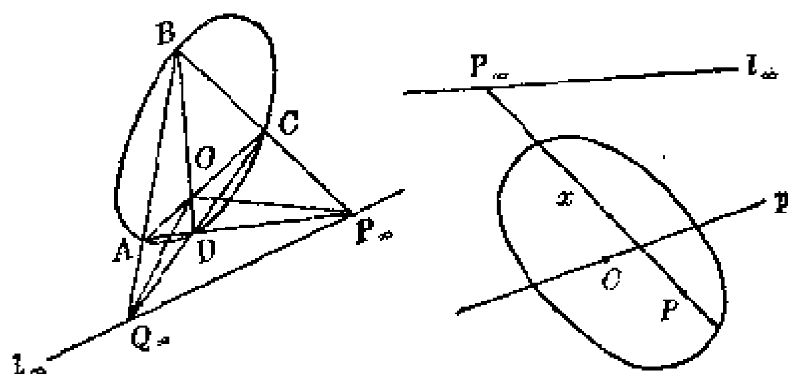


图 26-6

例 2 求证：过一定点(不在渐近线上)所作二阶曲线诸弦中点的轨迹是另一个二阶曲线.

证明 如图26-6，设定点为 P，过 P 所作的弦为 x，x 上的无穷远点为 P_∞.

则 x 被其共轭方向的直径所平分，记此直径为 p，当 x 围绕点 P 变动时，P_∞ 沿 l_∞ 变动，而且 p 围绕中心 C 变动. 因此有

$$\text{线束}P(x)\barwedge\text{点列}l_\infty(P_\infty)$$

但 P_∞ 是 p 的极点，故有

$$\text{点列}\ l_\infty(P_\infty)\barwedge\text{线束}C(p)$$

所以线束 $P(x)\barwedge$ 线束 $C(p)$，根据二阶曲线的射影定义，命题

得证.

下面推求二直径成为共轭的条件.

给出一条直径 l: $\frac{\partial S}{\partial x_1}+k\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$, 求其共轭直径.

直径 l 与无穷远直线的交点为: $(a_{12}+a_{22}k,\ -a_{11}-a_{12}k,\ 0)$, 它的极线 $\bar{l}$ 为 l 的共轭直径. $\bar{l}$ 的方程为:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}(a_{12}+a_{22}k)-\frac{\partial S}{\partial x_2}(a_{11}+a_{12}k)=0$$

即

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}+\bar{k}\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$$

其中

$$\bar{k}=-\frac{a_{11}+a_{12}k}{a_{12}+a_{22}k}$$

所以

$$a_{11}+a_{12}(k+\bar{k})+a_{22}k\bar{k}=0 \tag{26.5}$$

即为 $l, \bar{l}$ 成为共轭的条件.

注意: 在直角坐标系下直径 l 方程中的 k 是直径 $\bar{l}$ 的斜率, 而 $\bar{l}$ 方程中的 $\bar{k}$ 是 l 的斜率.

若二直径写为

$$\mu\frac{\partial S}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial S}{\partial x_2}=0,\qquad \tilde{\mu}\frac{\partial S}{\partial x_1}+\tilde{\lambda}\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$$

则成为共轭的条件是

$$a_{11}\mu\tilde{\mu}+a_{12}(\lambda\tilde{\mu}+\mu\tilde{\lambda})+a_{22}\lambda\tilde{\lambda}=0 \tag{26.5$'$}$$

26.3 渐近线

对于二阶曲线 $S=0$, 在复平面我们规定(21.7)及(23.1)为虚点(p_i)的切线及极线, 于是配极原则对于虚点仍然成立.

定义 26.5 二阶曲线上的无穷远点的切线, 如果不是无穷远

直线，则称为二阶曲线的渐近线。

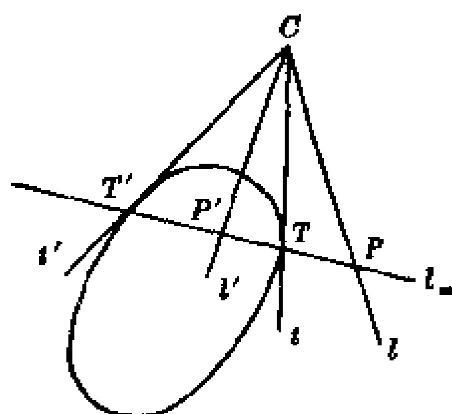


图 26-7

渐近线有以下重要性质：

定理26.3 二阶曲线的两条渐近线相交于中心，而且调和分离任何一对共轭直径.

证明 如图 26-7, t, t' 是渐近线，l, l' 是共轭直径，因为渐近线是切线，所以切点 T, T' 就是它的极点，但 T, T' 在 l_∞ 上，所以l_∞通过渐近线的极点. 因此渐近线也必须通过 l_∞ 的极点. 即渐近线通过中心.

因为 l, l' 为共轭直径，所以$(PP', TT')=-1$，故有$(ll', tt')=-1$. 即渐近线调和分离共轭直径. 至此定理证完。

以下讨论(26.1)的渐近线的几种不同求法.

(1) 由于渐近线是切线，所以通过本身的极点，这就是说渐近线是自共轭直径. 则由二直径共轭的条件(26.5)里令 $\bar{k}=k$ 得

$$a_{22}k^2+2a_{12}k+a_{11}=0 \tag{26.6}$$

由(26.6)解得 k_1, k_2，则得渐近线方程为：

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}+k_1\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}+k_2\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$$

(2) 由于(26.1)与 l_∞ 的交点满足

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0 \tag{26.2}$$

而(26.2)表示通过原点的二直线. 所以此二直线分别与渐近线平行. 因此若$C(\xi,\eta)$为中心，则渐近线方程为

$$a_{11}(x-\xi)^2+2a_{12}(x-\xi)(y-\eta)+a_{22}(y-\eta)^2=0 \tag{26.7}$$

所以求出中心后即可得渐近线.

（3）将渐近线作为通过中心的切线来求．由§21 例 2 知通过中心的切线方程为 $S_{pp}S=S_p^2$．

不难计算，对于中心(A_{31}, A_{32}, A_{33})，$S_p=|a_{ij}|x_3$, $S_{pp}=|a_{ij}|\cdot A_{33}$．所以切线方程变为 $|a_{ij}|A_{33}S=|a_{ij}|^2x_3^2$，即 $A_{33}S=|a_{ij}|\cdot x_3^2$．

渐近线方程为　$A_{33}S=|a_{ij}|x_3^2$　或

$$S+\lambda x_3^2=0 \qquad \left(\lambda=-\frac{|a_{ij}|}{A_{33}}\right) \tag{26.8}$$

令 $x_3=1$，则得渐近线方程为 $A_{33}S=|a_{ij}|$ 或

$$S+\lambda=0 \qquad \left(\lambda=-\frac{|a_{ij}|}{A_{33}}\right) \tag{26.8$'$}$$

（4）根据习题 3 用对合的概念来求(将渐近线作为对合的不变直线)．留作思考．

例 3　求双曲线 $x^2+2xy-3y^2+2x-4y=0$ 的渐线方程．

解一　用方法(1)：

设渐近线方程为

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}+k\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$$

根据(26.6)有

$$-3k^2+2k+1=0$$

解出 $k_1=1$, $k_2=-\frac{1}{3}$．所以渐近线方程是

$$x+y+1+(x-3y-2)=0$$

与

$$x+y+1-\frac{1}{3}(x-3y-2)=0$$

即渐近线方程是

$$2x-2y-1=0 \text{ 与 } 2x+6y+5=0$$

解二 用方法(3)．需要求出(26.8)′里的λ．

因为(26.8)表示二直线，故可由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix}=0$$

求λ．

将已知a_{ij}的值代入上式得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0+\lambda \end{vmatrix}=0$$

由此得 $\lambda=-\frac{5}{4}$. 因此渐近线方程为

$$x^2+2xy-3y^2+2x-4y-\frac{5}{4}=0$$

即
$$(2x-2y-1)(2x+6y+5)=0$$

下面再举例说明用所讲理论证明解析几何有关问题．

例 4 双曲线的任一条切线交两条渐近线于两点．求证：切点是此二点所连线段的中点．

证明 如图 26.8，设过M点的切线交两条渐近线于P,Q,C是

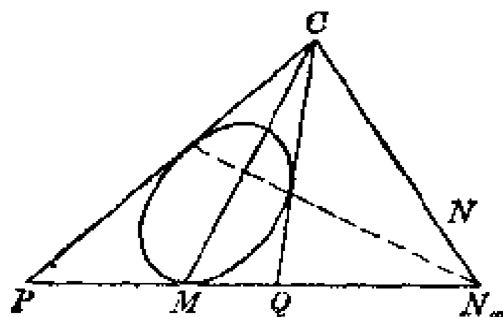


图 26-8

中心，直径CM的共轭直径是CN，则根据定理 26.3 知CM,CN与CP,CQ调和共轭．又PQ与CN平行，设二者交于N_∞，所以

$(QP, MN_\infty)=-1$, 所以M为PQ的中点.

例 5 求证：双曲线上任一点的切线与两条渐近线所围成的三角形的面积为常量.

证明 如图 26-9, 设双曲线的二切线与一渐近线交于A, A'两点, 与另一渐近线交于B、B'两点.

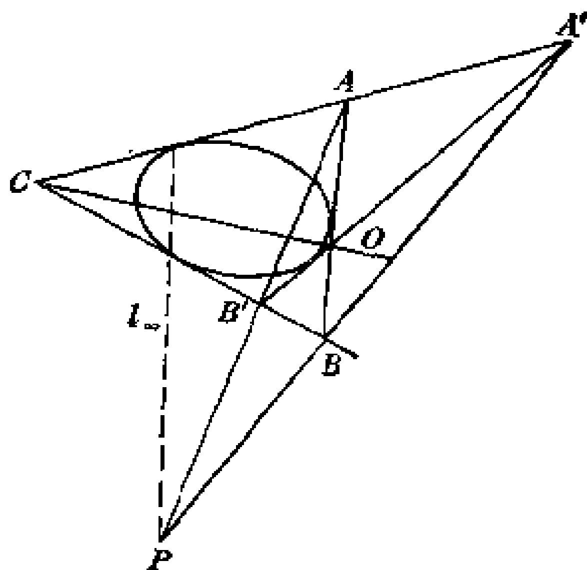


图 26-9

则两切线与两渐近线构成一个完全四线形, 它的对顶线是AB', $A'B$与CO(其中C为中心, O为AB与$A'B'$的交点).

根据§23例3的对偶知, 这个对顶三线形是自极三线形.

所以OC的极点为$A'B$与AB'的交点P, 而OC为直径, 因此P为无穷远点, 故$AB' \parallel A'B$. 因此$\triangle A'B'A$与$\triangle AB'B$等积. 所以$\triangle CAB$与$\triangle CA'B'$等积.

习 题

1. 求二阶曲线$x^2+2xy+2y^2+4x+2y+1=0$的中心与过(1, 1)点的直径及其共轭直径.

2. 求下列二阶曲线的直径, 它所平分的弦与给定的直线平行.

(1) $x^2-y^2+3x+y-2=0$, $2x+y=0$;

(2) $\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$; $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}$.

3. 求证：有心二阶曲线直径与共轭直径的对应为对合.

4. 求证：二阶曲线的以 P_1 为中点的弦 HK 平行于 P_1 的极线，又如果 $P_1(y_1, y_2, y_3)$，求出 HK 的方程.

5. 求二阶曲线 $ax^2+2hxy+by^2=1$ 与 $a'x^2+2h'xy+b'y^2=1$ 的公共的共轭直径并证明它们与所给二阶曲线的一对公弦调和共轭.

提示：用定理 26.3.

6. 如图 26-10，T 是有心二阶曲线弦 QQ' 的极点，O 是中心. OT 交 QQ' 于 V，交二阶曲线于 U, U'. 求证：$QV=VQ'$ 且 $OU^2=OV\cdot OT$.

7. 给定二级曲线方程 $\Sigma a'_{ij}u_iu_j=0$，如何求中心？以 $u_1^2-u_1u_2+u_2^2+u_1u_3+2u_2u_3+u_3^2=0$ 为例说明.

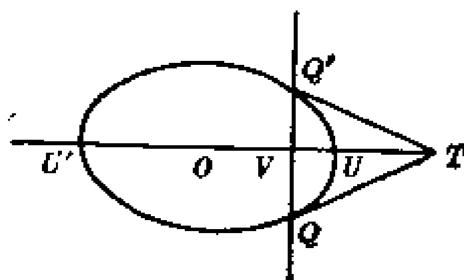


图 26-10

8. 求下列双曲线的渐近线.

(1) $x^2+3xy-4y^2+2x-10y=0$

(2) $xy+y^2-x-3y-2=0$

(3) $xy-a^2=0$

9. 求证双曲线的下列性质：

(1) 从双曲线上任何一点引直线各平行于渐近线，证明这二直线和渐近线所成平行四边形之面积一定.

(2) 任意一直线交双曲线与渐近线成相等的线段.

10*. 设 PP' 是二阶曲线的直径，任何点 Q 的切线与 P 点的切线交于 R；$P'Q$ 交 PR 于 X，求证：$PR=RX$.

11. 求证 $S\equiv\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$ 的以 (x_0, y_0) 为中点的弦的方程为：

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})(x-x_0)+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23})(y-y_0)=0$$

由此再证明有心二阶曲线通过固定点 $P(\alpha, \beta)$ 的弦的中点的轨迹仍是二阶曲线且以 PC 中点为中心(其中 C 是原二阶曲线的中心).

提示：在第 4 题所求得的方程里令 $x_3=y_3=1$.



§27 二次曲线的仿射分类

设有仿射坐标系下的二阶曲线:

$$S \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}) \qquad (27.1)$$

现在讨论(27.1)的分类问题，分为以下几种情况.

一、$|a_{ij}| \neq 0$，即(a_{ij})的秩为3.

1. $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$，此时二阶曲线是有心的. 取中心为$A_3'$，过中心的两条共轭直径$A_3'A_2'$，$A_3'A_1'$，以及中心的极线（无穷远直线）为坐标三点形的三边，并适当选取单位点建立仿射坐标系，由于这个坐标三点形是自配极三点形，仿照§24的方法可以推出在新坐标系之下(27.1)的方程化为：

$$\pm x_1'^2 \pm x_2'^2 \pm x_3'^2 = 0 \quad (27.2)$$

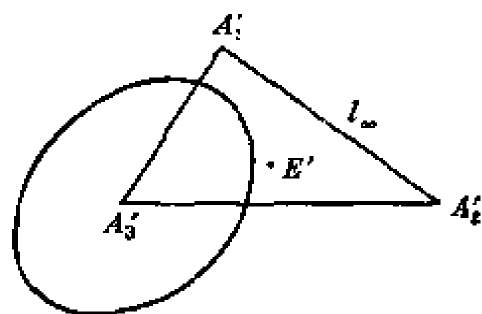


图 27-1

适当地改变坐标的号码以及用 -1 去乘这些方程，我们可以得到

$$\left.\begin{array}{l} x_1''^2 + x_2''^2 - x_3''^2 = 0 \\ x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 = 0 \\ x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (27.3)$$

(27.3)的前两个方程$A_{33}'' > 0$，所以它们表示椭圆，第一个是实椭圆，第二个是虚椭圆，第三个方程$A_{33}'' < 0$，所以表示双曲线.

要注意的是，以上的分类既然是与§24用同样的方法讨论，为什么在(24.8)里有两种情况，而在(27.3)里却有三种情况呢？这是因为在§24里x_1, x_2, x_3，三个坐标有同样的地位，所以$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$，$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$（即$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$）看作是同一情况. 但是现在$x_1, x_2, x_3$的地位不同了，$x_3 = 0$表示无穷远直线，所以$x_1$与$x_3$没有相同的地位.

2. $A_{33} = 0$，此时二阶曲线为抛物线. 以无穷远直线和一条直径以及此直径与二阶曲线相交的有穷交点(A_3')处的切线为坐标三

点形的三边，并适当选取单位点建立仿射坐标系．设在此新坐标系之下(27.1)的方程化为

$$\Sigma a'_{ij}x'_i x_j=0 \qquad (a'_{ij}=a'_{ji}) \tag{27.4}$$

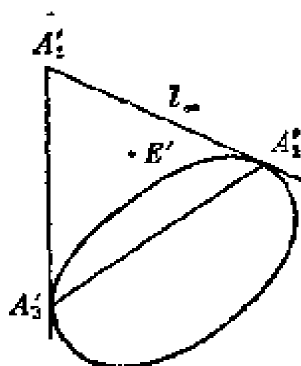


图 27-2

由于 $A'_2(0,1,0)$ 的极线是 $a'_{21}x'_1+a'_{22}x'_2+a'_{23}x'_3=0$，此式要与 $x'_2=0$ 表同一直线，故有 $a'_{21}=a'_{23}=0$，$a'_{22}\neq 0$，同理可以得出 $a'_{11}=a'_{12}=0$，$a'_{13}\neq 0$，$a'_{32}=a'_{33}=0$，$a'_{31}\neq 0$．因此在新坐标系之下，二阶曲线方程化为

$$a'_{22}x'^2_2+2a'_{13}x'_1x'_3=0 \tag{27.5}$$

再作变换

$$\begin{cases}\rho x'_1=\dfrac{a'_{22}}{a'_{13}}x''_1\\ \rho x'_2=x''_2\\ \rho x'_3=x''_3\end{cases}$$

我们得到

$$x''^2_2+2x''_1x''_3=0 \tag{27.6}$$

在(27.6)里 $A''_{33}=0$，所以它表示抛物线。

二、$|a_{ij}|=0$，且(a_{ij})的秩为 2．

在这种情况下，二阶曲线退化且有一个奇异点，可分为以下几种情况：

1．奇异点为有穷远点，仿照§24 的方法，但将 A'_1, A'_2 取在 l_∞ 上，则方程(27.1)化为 $\qquad \pm x''^2_1\pm x''^2_2=0 \qquad (27.7)$

此时(27.7)式即

$$\left.\begin{aligned}x''^2_1-x''^2_2=0\\ x''^2_1+x''^2_2=0\end{aligned}\right\} \tag{27.8}$$

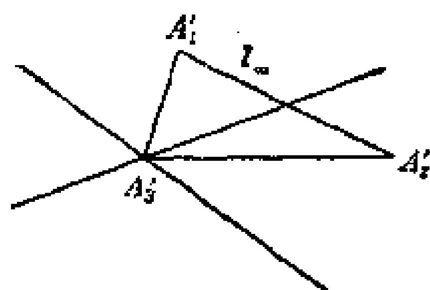


图 27-3

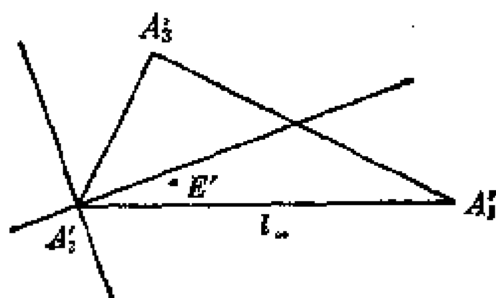


图 27-4

(27.8)的第一式表示一对相交实直线，第二式表示一对共轭虚直线.

2. 奇异点为无穷远点，且无穷远直线上无曲线上其他点，此时以奇异点为 A_2'，仍仿照 § 24 的方法，但将 A_1', A_2' 取在无穷远直线上，则方程(27.1)化为

$$\left.\begin{aligned}x_1'^2-x_3'^2=0\\x_1'^2+x_3'^2=0\end{aligned}\right\}\qquad(27.9)$$

(27.9)的第一式表示一对实平行直线，第二式表示一对虚平行直线.

3. 奇异点为无穷远点，且无穷远直线上仍有曲线上的点，此时以奇异点为 A_2'，再于曲线上取一无穷远点为 A_1'，最后于曲线上取一有穷远点为 A_3'. 又适当选取单位点建立仿射坐标系，于是在新坐标系之下，二阶曲线方程里必有 $a_{11}'=a_{22}'=a_{33}'=a_{12}'=a_{23}'=0$，因此得出

$$x_1'x_3'=0\qquad(27.10)$$

(27.10) 表示无穷远直线与一条有穷直线.

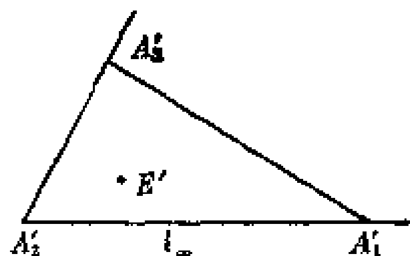


图 27-5

三、$|a_{ij}|=0$，且(a_{ij})秩为 1.

在这种情况下，二阶曲线退化且有无穷多奇异点在一直线上.

1. 如果奇异点所在的直线不是无穷远直线，以此直线为 x_1'

$=0$，则仿照 § 24 的方法可得方程(27.1)化为

$$x_1'^2=0 \tag{27.11}$$

(27.11)表示一对重合的有穷直线.

2. 如果奇异点所在的直线为无穷远直线，以此直线为 $x_3'=0$，则得方程(27.1)化为

$$x_3'^2=0 \tag{27.12}$$

(27.12)表示一条无穷远重合直线.

至此得到二阶曲线的仿射分类如下：

$\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0 \quad (a_{ij}=a_{ji})$

- (a_{ij}) 秩 3
  - $A_{33}\neq 0$
    - $A_{33}>0$
      - $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ ……实椭圆
      - $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ ……虚椭圆
    - $A_{33}<0$，$x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$ ……双曲线
  - $A_{33}=0$ $x_2^2+2x_1x_3=0$ ……抛物线
- (a_{ij}) 秩 2
  - $x_1^2-x_2^2=0$ ……二实相交直线
  - $x_1^2+x_2^2=0$ ……二虚相交直线
  - $x_1^2-x_3^2=0$ ……二实平行直线
  - $x_1^2+x_3^2=0$ ……二虚平行直线
  - $x_1x_3=0$ ……有穷直线与无穷远直线
- (a_{ij}) 秩 1
  - $x_1^2=0$ ……二重合直线(有穷)
  - $x_3^2=0$ ……二重合直线(无穷)

思考：二阶曲线的射影分类与仿射分类的区别. 说 A_{33} 是仿射不变量，对不对？

例 求仿射坐标变换，化 $2x^2-2xy+5y^2-2x-8y+4=0$ 为标准形式.

解 齐次方程为

$$2x_1^2-2x_1x_2+5x_2^2-2x_1x_3-8x_2x_3+4x_3^2=0$$

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 5 & -4\\ -1 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

的秩为 3,

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}>0$$

故知二阶曲线非退化且属于椭圆型.

首先求出中心为(1, 1, 1), 取中心为 A_3', 再任取一直径 $x_1-x_2=0$ 及共轭直径 $x_1+4x_2-5x_3=0$ 为 x_2' 轴及 x_1' 轴[即 A_2', A_1' 的旧坐标分别为(1, 1, 0)与(−4, 1, 0)]. 于是可设坐标变换为

$$\begin{cases} \rho x_1'=k_1(x_1-x_2) \\ \rho x_2'=k_2(x_1+4x_2-5x_3) \\ \rho x_3'=k_3x_3 \end{cases}$$

又取新坐标单位点在旧坐标系里的坐标为(1, 2, 1)则 $k_1:k_2:k_3=4:-1:-4$, 故得

$$\begin{cases} \rho x_1'=4(x_1-x_2) \\ \rho x_2'=-(x_1+4x_2-5x_3) \\ \rho x_3'=-4x_3 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \lambda x_1=4x_1'-4x_2'-5x_3' \\ \lambda x_2=-x_1'-4x_2'-5x_3' \\ \lambda x_3=\qquad\qquad -5x_3' \end{cases}$$

将此式代入所给二阶曲线的齐次方程得

$$9x_1'^2+16x_2'^2-5x_3'^2=0$$

再作坐标变换 $\rho x_1'=\sqrt{\frac{5}{9}}x_1''$, $\rho x_2'=\sqrt{\frac{5}{16}}x_2''$, $\rho x_3'=x_3''$, 则得

$$x_1''^2+x_2''^2-x_3''^2=0$$

习 题

1. 求仿射坐标变换化下列诸方程为标准形式.

(1) $x^2+2xy+2y^2-6x-2y+9=0$

(2) $x^2-2xy+2y^2-4y+3=0$

(3) $4x^2+4xy+y^2+4x+2y-48=0$

(4) $2x^2-2xy-y^2+2x+5y-8=0$

(5) $x^2-2xy+y^2-2x+2y+1=0$

2. 求证：在仿射坐标系下，

$$(\alpha x+\beta y+\gamma)^2+2(px+qy+r)=0 \quad \left(\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ p & q\end{vmatrix}\neq 0\right)$$

表示一抛物线，且求 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, $px+qy+r=0$ 的几何意义。

§28 圆环点与迷向直线

本节引入圆环点与迷向直线这两个概念，为下节讨论二阶曲线的度量性质作准备．我们将看到这两个概念本身也有它的重要性．

本节起采用笛氏直角坐标系进行讨论，并假定实平面上两点距离、两直线交角以及四元素交比的计算公式对于复平面上的有穷元素仍适用．

在§18曾指出，仿射变换成为相似变换的充要条件为保持 $I(1,i,0)$, $J(1,-i,0)$ 两点不变，因此正交变换必保持 I,J 不变．二阶曲线的度量性质常以它们为基础进行讨论．

设有二阶曲线

$$S\equiv\sum a_{ij}x_ix_j=0 \quad (a_{ij}=a_{ji}) \tag{28.1}$$

它也就是解析几何里圆锥曲线方程的齐次坐标形式．

定理 28.1 一个非退化圆锥曲线是圆（实圆、点圆或虚圆）的充要条件是它通过 $I(1,i,0)$ 和 $J(1,-i,0)$ 两点．

证明 必要性：若(28.1)表示圆，则有

$$a_{11}(x_1^2+x_2^2)+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$$

显见 I,J 坐标都满足这个方程；

充分性：若 I,J 的坐标所满足(28.1)，则有

$$a_{11}-a_{22}+2a_{12}i=0$$

$$a_{11}-a_{22}-2a_{12}i=0$$

故

$$a_{11}=a_{22}\neq 0, 且 a_{12}=0$$

因此圆锥曲线是圆.

推论 平面内不共线三个实点决定一个圆.

定义 28.1 $I(1, i, 0)$与$J(1, -i, 0)$两点称为圆环点(圆点).

显然,圆环点的线坐标方程为$u_1^2+u_2^2=0$.

定义 28.2 通过圆环点的任意虚直线叫做迷向直线(极小直线).

显然,任意迷向直线与无穷远直线的交点是圆环点. 又由于圆环点具度量性质,所以迷向直线也具有度量性质. 迷向直线构成两个以I或J为中心的平行直线束,斜率分别为i或$-i$. 通过平面内任一有穷点有两条迷向直线,分别属于二直线束.

定理 28.2 虚直线是迷向直线的充要条件是它上面任意两个不同的有穷点的距离是零.

证明 设$y=\lambda x+b$是一条虚直线,$P_1(x_1, y_1)$,$P_2(x_2, y_2)$是其上两个不同的有穷点,则有

$$y_2-y_1=\lambda(x_2-x_1)$$

所以

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1+\lambda^2)(x_2-x_1)^2}$$

因此若$\lambda=i$或$\lambda=-i$,则$|P_1P_2|=0$;若$|P_1P_2|=0$,则$\lambda=\pm i$.

定理 28.3 一条迷向直线与另一条直线的交角是不定的.

证明 (1) 设有两条同类迷向直线,即它们的斜率λ_1与λ_2同为$+i$或$-i$,则$\lambda_1\lambda_2=-1$. 由交角公式

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$$

得知 θ 是不定的[*]. $\left(\operatorname{tg}\theta=\frac{0}{0}\right)$

(2) 设有一条迷向直线，另一条是不同类的迷向直线或者不是迷向直线，令迷向直线斜率为 $-i$，另一条直线斜率为 $\lambda(\lambda\neq-i)$. 则由交角公式得

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\lambda+i}{1-\lambda i}=i$$

又由公式 $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{i}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\right)$，当 $\operatorname{tg}\theta=i$ 时，有 $e^{i\theta}=0$.

设 $\theta=\theta_1+i\theta_2$，则 $e^{i\theta}=0$ 化为 $e^{-\theta_2}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=0$，因此 θ_1 与 θ_2 均不存在，故 θ 也不存在.

定理 28.4(拉格尔 Laguerre) 设两条非迷向直线的交角为 θ，又这两条直线与过它们交点的两条以 $-i$，i 为斜率的迷向直线所成交比为 μ，则必有

$$\theta=\frac{1}{2i}\ln\mu$$

证明 设两条非迷向直线为 l_1，l_2，其斜率为 λ_1，λ_2. 迷向直线为 m_1，m_2，斜率为 $-i$，$+i$. 则

$$\begin{aligned}\mu&=(l_1l_2,m_1m_2)\\&=\frac{(\lambda_1+i)(\lambda_2-i)}{(\lambda_2+i)(\lambda_1-i)}=\frac{(1+\lambda_1\lambda_2)+i(\lambda_2-\lambda_1)}{(1+\lambda_1\lambda_2)-i(\lambda_2-\lambda_1)}\\&=\frac{1+i\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}}{1-i\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}}\end{aligned}$$

因为

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$$

---

* 或称迷向直线与自身垂直(它也与自身平行)

所以

$$\mu=\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta} \tag{28.2}$$

又 $$\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{i}\left(\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{2i\theta}+1}\right)$$

或

$$e^{2i\theta}=\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta} \tag{28.3}$$

由(28.2)，(28.3)得 $\mu=e^{2i\theta}$ 或 $\theta=\frac{1}{2i}\ln\mu$.

推论　两条非迷向直线垂直的充要条件是这两条直线与过交点的两条迷向直线调和共轭，亦即两条直线垂直的充要条件是这两直线上的无穷远点与圆环点调和共轭.

拉格尔定理十分重要，这个定理与上面的推论分别以交比与调和共轭这两个射影概念表达了角与垂直这两个度量概念，形成了角与垂直的射影解释，从而把欧氏几何与射影几何联系起来.

例1　求证：一个圆中同弧上的圆周角相等.

证明　如图 28-1，设 AB 弧上两个圆周角为$\angle APB$，$\angle AP'B$，则 I, J, A, B, P, P' 在同一圆周上. 因为

$$P(AB, JI)=P'(AB, JI)$$

又 $$\mu_1=(A_1B_1, JI)=P(AB, JI)$$

$$\mu_2=(A_2B_2, JI)=P'(AB, JI)$$

所以 $\mu_1=\mu_2$，即 $\frac{1}{2i}\ln\mu_1=\frac{1}{2i}\ln\mu_2$

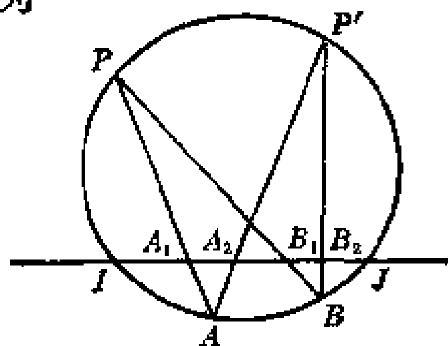


图　28-1

由拉格尔定理得

$$\angle APB=\angle AP'B$$

反过来，可以证明：当$\angle APB=\angle AP'B$时则 P, P', A, B 四点共圆.

例2 一个非退化圆锥曲线是等轴双曲线的充要条件是 I, J 关于它是共轭点。

证明 非退化圆锥曲线 $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0(a_{ij}=a_{ji})$ 是等轴双曲线的充要条件为 $a_{11}+a_{22}=0$，此恰为 I 与 J 成为共轭点的充要条件。

习 题

1. 利用拉格尔定理求过原点二直线 $ax^2+2hxy+by^2=0$ 所成的角.
2. 以四条迷向直线为边作一四边形，其中每两边平行，则其对角线互相垂直且平分. 试证之.
3. 求直线 $x+y+2=0$ 上与原点距离为零的点.
4. 求证：直线 $a_1x+a_2y+a_3=0$ 是迷向直线的充要条件是 $a_1^2+a_2^2=0$.
5. 通过计算直接证明：圆环点和迷向直线在正交变换下不变.
6. 求证：圆的任何一对共轭直径互相垂直.
7. 求证：若两条有穷直线的交角是不定的，则其中至少有一条是迷向直线.

§ 29 二阶曲线的主轴、焦点与准线

29.1 主轴

定义 29.1 二阶曲线的一条直径如果平分一组和它垂直的弦，则此直径叫做主轴，主轴与曲线的有穷交点叫做顶点。

由定义可见，二阶曲线关于主轴是对称的.

我们先讨论抛物线. 如果已知抛物线的一条主轴，则它必是一条直径且垂直于顶点处的切线，(此时是将切线看作弦的极限位置)如图 29-1，设 V 是顶点，P_∞ 是抛物线上的无穷远点，Q_∞ 是 V 点的切线上的无穷远点，则有 $(P_\infty Q_\infty, IJ)=-1$，且主轴 VP_∞ 是 Q_∞

的极线. 由于 P_∞ 唯一确定, 所以Q_∞与直径唯一确定, 故有以下定理.

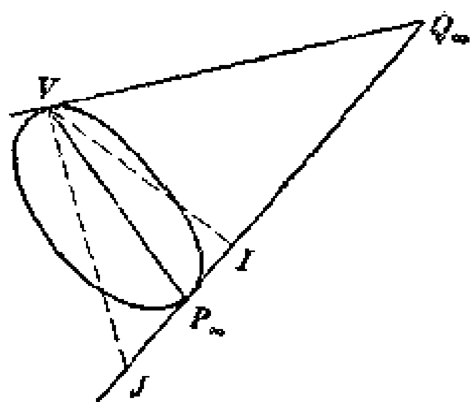


图 29-1

定理29.1 抛物线有唯一主轴, 唯一顶点. 主轴是抛物线上无穷远点关于两个圆环点的调和共轭点的极线.

再讨论有心二阶曲线. 如果一对共轭直径互相垂直, 则它们都是主轴, 故由§28 习题 6 知圆的直径都是主轴, 圆上每个点都是顶点. 对于非圆的有心二阶曲线有以下定理.

定理29.2 除圆以外的有心二阶曲线只有一对主轴, 它是两条渐近线所成角的平分线,顶点个数为 4.

证明 由§26 习题 3 知渐近线为共轭直径形成的对合的不变直线. 所以渐近线所成角的平分线,即为一对垂直的共轭直径,它们就是主轴.

若再有一对主轴,则 CI, CJ 将为不变直线(这里C为中心),故 CI, CJ 为渐近线,因此曲线将通过圆环点而为圆, 这与假设矛盾,所以只有两渐近线所成角的平分线这一对主轴, 4 个顶点.

无论是抛物线或有心二阶曲线,都可以利用主轴,建立适当的直角坐标系以求得其标准方程,与解析几何所讨论的相同.

下面讨论如何求主轴方程.

首先考虑 $S=0$ 为有心二阶曲线. 设有直径 $\frac{\partial S}{\partial x_1}+k\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$,

即 $(a_{11}+a_{12}k)x_1+(a_{12}+a_{22}k)+(a_{13}+a_{23}k)x_3=0$, 如果它与所平分的弦垂直,则有 $a_{12}(k^2-1)+(a_{11}-a_{22})k=0$. 由此式解出 k, 代入直径方程 $\frac{\partial S}{\partial x_1}+k\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$,即得到主轴方程为:

$$\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2}{a_{11}-a_{22}}=\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)}{a_{12}} \quad (29.1)$$(*)

由(29.1)也看到除圆以外，有心二阶曲线有两条主轴.

再考虑 $S=0$ 为抛物线. 直径都通过中心$(A_{31}, A_{32}, 0)$. 如果一直径垂直于它所平分的弦，则此直径是$(A_{32}, -A_{31}, 0)$的极线. 即

$$A_{32}\frac{\partial S}{\partial x_1}-A_{31}\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$$

这就是抛物线的主轴方程.

29.2 焦点与准线

定义 29.2 通过圆环点 I, J 所引二阶曲线的切线，它们彼此的有穷交点称为二阶曲线的焦点. 焦点的极线称为二阶曲线的准线.

下面证明用这样定义所得到的实焦点或准线就是通常的焦点或准线.

先讨论抛物线情形. 设抛物线方程为 $y^2=2px$，则可作两条迷

---

* 除用(29.1)外，还可以用下面方法求主轴方程.

由 $-\frac{a_{11}+a_{12}k}{a_{12}+a_{22}k}=-\frac{1}{k}$ 有

$a_{11}+a_{12}k=\frac{a_{12}+a_{22}k}{k}(=\lambda)$.

所以

$$\begin{cases}a_{11}-\lambda+a_{12}k=0\\ a_{12}+(a_{22}-\lambda)k=0\end{cases}$$

如果 k 存在，则有

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

由上式求出 λ，即可得主轴方程 $\frac{\partial S}{\partial x_1}+k\frac{\partial S}{\partial x_2}=0$ 里的 k 值.

向切线(即通过圆环点的有穷切线),其方程为

$$y=ix+\frac{p}{2i},\quad y=-ix-\frac{p}{2i} \tag{29.2}$$

由(29.2)解得交点为 $E\left(\frac{p}{2},0\right)$,即为焦点。

此外,焦点的极线为 $d:x=-\frac{p}{2}$,即为准线.

我们看到焦点在主轴上,迷向切线的切点则在准线上(图29-2).因此有以下定理.

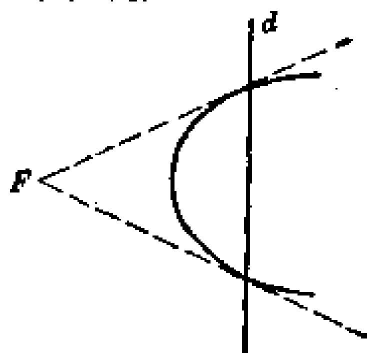


图 29-2

定理29.3 抛物线有两条迷向切线,一个焦点,一条准线.焦点在主轴上,迷向切线的切点在准线上.

再讨论椭圆情形.设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$,则可作四条迷向切线,其方程为

$$\begin{aligned}&y=i(x-c),\quad y=i(x+c)\\&y=-i(x-c),y=-i(x+c)\end{aligned} \tag{29.3}$$

由(29.3)解得不同类迷向直线的交点为$F(c,0)$, $F'(-c,0)$与$G(0,ci)$,$\bar{G}(0,-ci)$,其中F,F'是x轴上的实点,$G,\bar{G}$是y轴上的共轭虚点.故知有四个焦点,(两实两虚)分别在两条主轴上.四个焦点对应的准线顺次为

$$d:\ x=\frac{a^2}{c},\quad d':x=-\frac{a^2}{c},\quad e:y=\frac{b^2}{ci},\quad e':y=-\frac{b^2}{ci}$$

因此有以下定理.

定理 29.4 实椭圆有四条迷向切线(每两条是同类),四个焦点(两实两虚)分别在两主轴上,四条准线(两实两虚),迷向切线的切点在对应准线上.

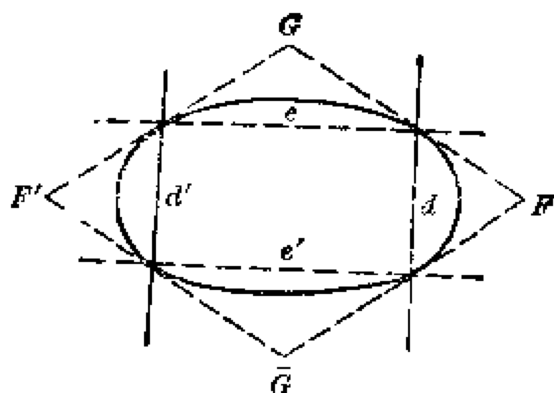


图 29-3

对于双曲线情形留作读者思考.

思考：圆的焦点与准线.

例 求证：二阶曲线的任意一条切线与两条定切线的交点在焦点处张成定角.

证明 如图 29-4，设任一切线为 m，两条定切线为 l_1，l_2，通过圆点 J, I 的切线为 l_3，l_4. 则 m 与 l_1, l_2, l_3, l_4 的交点所形成的交比为常数.

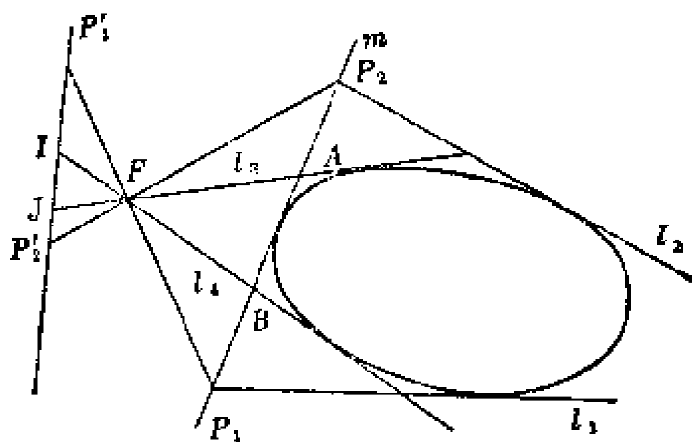


图 29-4

所以

$$(JI, P_1'P_2') = (AB, P_1P_2) = C(\text{常数})$$

再由拉格尔定理知 $\angle P_1FP_2 = \frac{1}{2i}\ln c =$ 定角.

最后讨论从(28.1)出发如何求焦点.

由§21例2知，通过 $P(p_1, p_2, p_3)$ 的切线方程为

$$S_{pp}S = S_p^2$$

即

$$(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3)S_{pp}$$

$$= [(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)x_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)x_2 + (a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3)x_3]^2$$

如果 P 是焦点，则自 P 的切线通过圆环点 I, J. 因此以上方程满足圆方程的条件. 所以

$$a_{11}S_{pp} - (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)^2 = a_{22}S_{pp} - (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)^2$$

并且

$$a_{12}S_{pp} = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)(a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)$$

这就是焦点坐标 (p_1, p_2, p_3) 所满足的方程，亦即焦点坐标可由以下方程组决定，称为焦点方程组.

$$\begin{cases} 4(a_{11} - a_{22})S = \left(\dfrac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 \\ 4a_{12}S = \left(\dfrac{\partial S}{\partial x_1}\right)\left(\dfrac{\partial S}{\partial x_2}\right) \end{cases}$$

或

$$\frac{u^2 - v^2}{a_{11} - a_{22}} = S = \frac{uv}{a_{12}}^{(*)} \tag{29.4}$$

其中 $u = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$, $v = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$

求出焦点后求其极线即得准线. 也可以直接由(28.1)求出准线(§30 习题7).

---

* 除用(29.4)求焦点外，还可以首先求出迷向切线，然后再求它们的交点而得到焦点，为此只需用 $y = \pm ix + h$ 代入给定的二阶曲线方程，根据相切的条件即可决定 h 的值，再求不同类迷向切线的交点.

习　　题

1. 已知抛物线 $2x^2+4xy+2y^2-4x+1=0$，求其主轴、顶点、焦点、准线。

2. 已知双曲线 $7x^2+6xy-y^2-16=0$，求其主轴、顶点、焦点、准线。

3. 在图 29-3 里，求证：FF'、GG' 是共轭直径。

4. 求证：过二阶曲线焦点的两条共轭直线垂直。

5. 设有外切于一抛物线的三点形，求证：三点形的外接圆通过抛物线的焦点。

6. 设 $S\equiv\sum a_{ij}x_ix_j=0(a_{ij}=a_{ji})$ 有心且有一焦点为原点，求证：$S=0$ 还有一个焦点为$\left(\frac{2A_{13}}{A_{33}},\frac{2A_{23}}{A_{33}}\right)$。

7. 设 T 是二阶曲线弦 PQ 的极点，F 是一个焦点，PQ 交与 F 相应的准线于 R。求证：FT，FR 是$\angle PFQ$ 的平分线。问 PQ 通过 F 时，得到什么结果？注意由本题可以导出"焦点准线性质"，从而得到离心率的概念。

提示：可用第 4 题。

8. 如果椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$看作由焦点$(0,\ ci)$及准线 $y=\frac{b^2}{ci}$而产生，试求其离心率。

9*. 求证：有心二阶曲线的垂直切线的交点的轨迹是一个圆（叫做导圆）。

10*. 对抛物线求上题的轨迹。

§30　共焦二次曲线束

在本节里简单介绍共焦二次曲线束。首先说明二次曲线束的意义。

设有二阶曲线

$$S\equiv\sum a_{ij}x_ix_j=0$$

$$S'\equiv\sum a'_{ij}x_ix_j=0$$

S 与 S' 交于四点 A,B,C,D。则对于不同的 λ，$S+\lambda S'=0$ 表示通过 A,B,C,D 的二阶曲线的集合，称为二阶曲线束。通过平面上另外任意一点有束中唯一一条二阶曲线。又如果 $S+\lambda S'=0$ 退化，

则一般为三对直线，即 $BC, AD; CA, BD; AB, CD$.

一个二阶曲线束被其中任意两条曲线完全确定.

对偶地，设有二级曲线

$$T \equiv b_{ij}u_iu_j = 0, \qquad T' \equiv \sum b'_{ij}u_iu_j = 0$$

T 与 T' 的公共直线为 a, b, c, d. 则对于不同的 λ, $T+\lambda T'=0$表示与 a, b, c, d 相切的二级曲线的集合，称为二级曲线束. 对于平面内另外任意一条直线有束中唯一一个二级曲线与它相切，若取无穷远直线，则得束中一抛物线. 如果 a, b, c, d 里有无穷远直线，则所得皆为抛物线.

注意：$S+\lambda S'=0$ 与 $T+\lambda T'=0$ 表示不同的体系，前者给出通过四点的二次曲线，后者给出与四直线相切的二次曲线.

现在说明共焦二次曲线束.

设有二点 S_1, S_2, 将 S_1, S_2 与圆环点 I, J 连接得一个四线形. 则所有与此四直线相切的二级曲线构成一个二级曲线束，束中所有曲线有共同的四个焦点(S_1, S_2 是其中的两个).

如果 S_1, S_2 的方程为

$$x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0, \quad y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3=0$$

则这个有公共焦点的二级曲线束方程为

$$(x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3)(y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3)+\lambda(u_1^2+u_2^2)=0$$

定义 所有有共同焦点的二次曲线的集合称为共焦二次曲线束(简称共焦束).

共焦二次曲线束是二级曲线束的特例，若一个二次曲线的线坐标方程为 $T=0$, 则任意与它共焦点的二次曲线方程为 $T+\lambda(u_1^2+u_2^2)=0$. 此式即为共焦束的一般方程.

可以证明，一直线关于共焦束内所有曲线的极点共线(习题 1 的对偶).

以下再对有心与无心情况分别做扼要说明.

设有椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ 两个实焦点S, S'坐标为$(\pm\sqrt{a^2-b^2},0)$，椭圆的线坐标方程为$a^2U^2+b^2V^2-1=0$，因此任意共焦曲线方程为

$$(a^2+\lambda)U^2+(b^2+\lambda)V^2-1=0$$

对应的点坐标方程为

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

若束中曲线通过$P_1(x_1,y_1)$，则

$$\phi(\lambda)\equiv(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)-(b^2+\lambda)x_1^2-(a^2+\lambda)y_1^2=0$$

当λ取$+\infty$, $-b^2$, $-a^2$时，$\phi(\lambda)$的符号为$+$，$-$，$+$. 因$a^2>b^2$，所以$\phi(\lambda)=0$有两个根λ_1, λ_2满足$\lambda_1>-b^2>\lambda_2>-a^2$. 所以对应$\lambda_1$的曲线是椭圆，对应$\lambda_2$的曲线是双曲线. 还可证明这两条曲线正交. 故得以下定理.

定理30.1 过平面内任意一点有共焦束内的二条曲线，一条是椭圆，一条是双曲线. 它们是正交的.

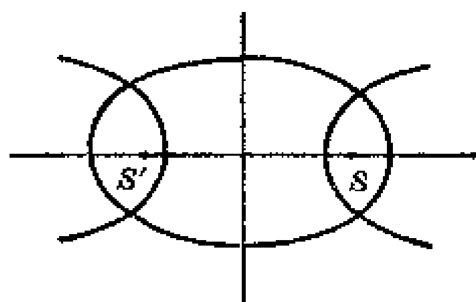


图 30-1

例 求证：一直线p_1关于共焦束的极点的轨迹是与p_1垂直的直线。

证明 $p_1[u_1,v_1]$关于$(a^2+\lambda)U^2+(b^2+\lambda)V^2-1=0$的极点是

$$(a^2+\lambda)U_1U+(b^2+\lambda)V_1V-1=0$$

记极点坐标为(x_1, y_1)，其中$x_1=-(a^2+\lambda)U_1$，$y_1=-(b^2+\lambda)V_1$，当λ变化时，(x_1,y_1)的轨迹为一直线

$$\frac{x}{U_1}-\frac{y}{V_1}+a^2-b^2=0$$

此直线与p_1垂直. 记此直线为p_2，则显然p_1也是p_2的极点的轨迹.

思考：若 p_1 与束中某曲线相切，问 p_2 是什么？

最后讨论共焦抛物线.

如图 30-2，抛物线的焦点为 S，与 l_∞ 的切点为 S'.

令 $S(0,0,1)$，$S'(1,0,0)$. 则点偶 S，S' 的方程为 $u_1u_3=0$. 因此 $u_1u_3=\lambda(u_1^2+u_2^2)$ 都表示以 S，S' 为焦点的二次曲线（其中 S' 为无穷远点），当 λ 变化时得到一束共焦抛物线，以原点为焦点，以 x 轴为主轴.

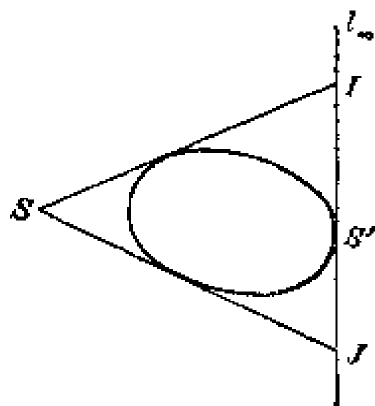


图 30-2

$u_1u_3=\lambda(u_1^2+u_2^2)$ 的点坐标方程为 $x_2^2=4\lambda(x_1+\lambda x_3)x_3$，非齐次形式为 $y^2=4\lambda(x+\lambda)$.

通过平面内任意点，束中有两条抛物线互相正交.

习　题

1. 求证：一点关于二阶曲线束的每一曲线的极线共点.

2. 求与四直线 $y=0$，$x+y+1=0$，$x+2y+4=0$，$x+4y-8=0$ 相切的抛物线方程.

3. 求 $S\equiv x^2+2xy-5y^2-4x+10y=0$ 与 $S'\equiv x^2+y^2-4x-2y=0$ 的公共弦方程.

4. 设 P_1 是一个定点，S 属于共焦二次曲线束

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$$

P_1 至 S 的切点为 Q_1、R_1. $\triangle P_1Q_1R_1$ 的外接圆又与 S 交于 Q_2、R_2. Q_2R_2 关于 S 的极点为 P_2. 求证：P_2 是一个定点.

5. 求与 $x^2+xy-y^2-1=0$ 共焦且与直线 $x+y+1=0$ 相切的二次曲线方程.

6. 给定二级曲线方程，如何求焦点？以求出 $2u_1^2-u_2^2-u_3^2+3u_2u_3+u_1u_2=0$ 为例说明之.

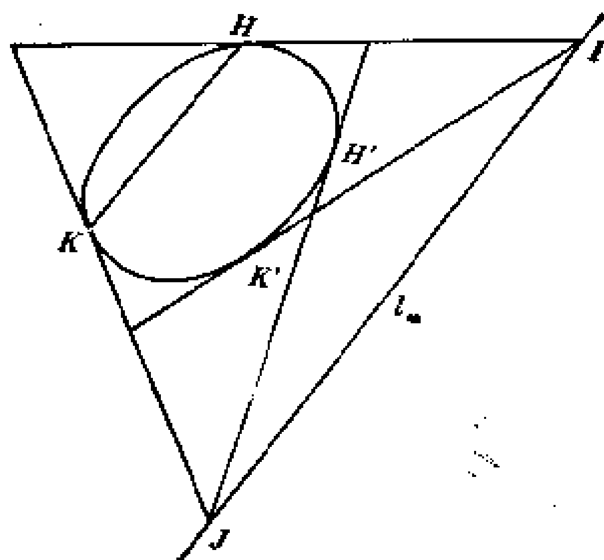


图 30-3

提示：考虑 $T+\lambda(u_1^2+u_2^2)=0$. 焦点为此二次曲线束的退化情况.

7*. 如图 30-3, 对一般二阶曲线 $\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$, 如何求出通过四点 H, K, H', K' 的二阶曲线束方程? 再进一步求出准线方程.

第七章　射影几何基础

§ 31　几何公理法简介

几何学和其他科学一样，是根据生产实践的需要而产生的，这些知识最初都是零散的片断的，当来自经验的几何知识已经积累到相当丰富时，把它们加以收集和整理并阐明它们之间的相互关系就成为必要的了．于是，在积累新的几何知识的同时，需要把大量的零星片断的、凭经验归纳得来的许多个别法则整理成为由一些几何原理推导出另一些几何原理的逻辑系统，这工作积累了多少代人的劳动，才逐渐形成了几何定理及其证明的概念．那些用以导出其他几何原理的不再加以证明的基本原理称为公理，用以解释其他概念而本身不再加以定义的概念称为基本概念，它们的性质只由公理来制约，除了这些公理和不加定义的基本概念以外，其他的原理和概念都必须由这些公理和基本概念逻辑地推导得出，这种方法就是所谓公理法．

公理法的创建是数学上伟大的成就之一，在这方面的工作做出卓越成绩的古代数学家中首先应提到公元前三世纪希腊数学家欧几里得(Euclid)，他的杰出著作"几何原本"作为几何课本流传了将近两千年，至今中学几何课本的叙述方式仍然和"几何原本"实质上没有多大差别．但是用近代的观点来看"几何原本"，我们可以发现，它并没有真正作到用公理法来整理几何知识的目的，因为其中的公理太少，只用这些公理作为几何学的基本根据是不够的，经过以后历代数学家的修改与补充，才逐渐完善．这里特别要提到的是关于"几何原本"中的第五公设的研究．

所谓欧几里得第五公设指的是下面的命题：

在一平面上如果直线 l 与另外两条直线a, b相交，有一侧的两个同侧内角α, β的和小于两直角，则直线a与b在同侧内角的和小于两直角的那一侧相交(图 31-1).

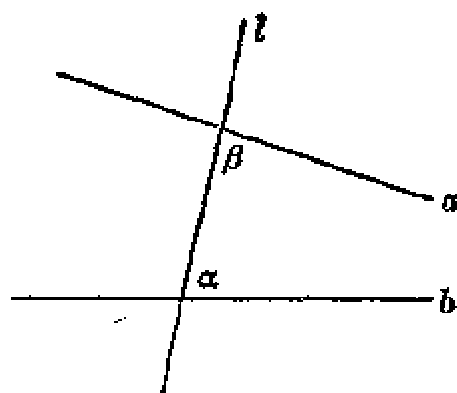


图 31-1

长期以来，人们试图证明欧氏第五公设，但都没有成功. 直到十九世纪初这个问题才得到解决，这一成就应该归功于罗巴切夫斯基(Lobachevsky)、高斯(Gauss)以及鲍耶(J. Bolyai). 他们不是证明了欧氏第五公设，而是证明了：如果不承认欧氏第五公设，则还存在着另一种与欧氏几何不同的几何，在其中没有任何矛盾. 这就是说，关于欧氏第五公设的试证导致了非欧几何的发现，这种几何一般称为罗氏几何.

罗氏几何的发现可以说是几何学的巨大的革命，它也促进了几何基础问题的研究，经过以后的不断发展，直到 1899 年出版了希尔伯特(Hilbert)"几何学基础"一书，提出了欧氏几何的完整的公理系统. 从而圆满地解决了欧氏几何以及罗氏几何的公理系统问题.

这种用公理系统规定几何学研究的基本对象、基本关系、公理，以及在这基础上展开逻辑推理的研究方法，不仅限于几何的基础问题，而且成了数学中有名的公理法. 由于几何学基础的整理工作引起了对数学各分支的基础的研究，例如对代数学基础的研究，由于建立"群"的公理、"环"的公理，从而形成了抽象代数这一门学科. 此外更进一步地研究了整个数学的基础，同时扩大到了其他领域，所以公理方法对整个科学的发展起了重要促进作用.

初等几何中所研究的基本对象——"点"、"直线"、"平面"，本是

从现实空间的某些实物抽象而成的概念，而"属于"、"介于"、"合同于"则是把实物之间的一些相互关系抽象而得到的几何对象之间的关系，但是在公理法的理论中，为了研究的广泛性，往往不谈基本对象的直观形象，而只谈对象的性质及其相互关系．所以用公理法的观点来看，几何空间是基本对象所构成的集合，而对象之间应该满足公理所规定的关系，所以我们可以随意地用一些具体的事物代表"点"、"直线"和"平面"，只要在这些具体实物之间，我们能解释公理体系所涉及的基本关系，譬如结合关系、顺序关系、合同关系等，使得这些关系符合公理系统所规定的要求，这样就构成了几何学．普通所熟悉的图形无关重要，它不过是几何学的一种直观形象，而每一种几何学的直观形象不只一个，我们称一种几何学的每一直观形象为这几何学的一个解释或一个模型．以下我们将看到模型对于公理体系问题的研究起很大的作用．

§32 实射影几何的公理体系

在十九世纪初期，不但几何基础的研究有了顺利的发展，而且产生了几何的又一个分支——射影几何学．研究图形的射影性质问题引起了许多几何学家的注意，到了十九世纪末期经过凯莱(Cayley)和克莱因(Klein)的研究发现可以用射影几何来给出欧几里得几何和两种非欧几何的模型．这样一来，射影几何和初等几何基础的研究，原来是互相独立的，从而相互联系起来了．

例如射影平面的几何仅讨论在一个或几个中心投影和截割之下保持不变的有关平面图形的性质，它可以从通常平面的几何去掉有关度量的概念和定理而得出，也可以由一组公理系统得出．

射影几何的公理体系不只一组，当然各组彼此是等价的．现在我们介绍其中之一．

基本概念:

(1) 基本对象: 点, 用 A、B、C、…表示; 直线, 用 a、b、c、…表示; 平面, 用 α、β、γ、…表示.

(2) 基本关系: 结合关系, 即点在直线上(直线通过点)和点在平面上(平面通过点). 顺序关系, 即点偶 A, B 分离点偶 C, D 和点偶 A, B 不分离点偶 C, D.

公理: 结合公理 I_{1-9}, 顺序公理 II_{1-6}, 连续公理 III.

根据这个公理体系, 可以除实数外不借助其他数学知识而推出射影几何的全部内容.

下面列出这三组公理:

第 I 组, 结合公理

I_1. 对于任意两个点 A 和 B, 存在直线 a 通过 A 与 B.

I_2. 对于任意两个不同的点 A 和 B, 至多存在一条直线通过它们.

I_3. 在每条直线上至少有三个点, 至少有三个点不在一条直线上.

I_4. 经过不在一条直线上的三个点 A, B, C, 有一个平面 α. 在每个平面上至少有一个点.

I_5. 通过不在一条直线上的三个点 A, B, C, 至多有一个平面.

I_6. 如果直线 a 有两个不同的点 A、B 在平面 α 上, 则直线 a 的每个点都在平面 α 上.

I_7. 如果两个平面 α、β 有公共点 A, 则它们至少还有一个公共点 B.

I_8. 至少有四个点不在一平面上.

I_9. 在一个平面上的两条直线必有公共点.

公理 I_7 和 I_8 是确定几何学维数的公理, 根据 I_8, 我们所研究的几何不能是平面上的几何所以维数不能小于 3, 而根据 I_7 不难

说明这里几何的维数不能大于 3；因为如果空间的维数大于 3，则 I_7 不成立.

从公理 I_{1-8} 可推出

（1）直线和平面总有公共点；

（2）两个平面总有公共直线；

（3）三个平面总有公共的点.

在 I_{1-8} 的基础上，可以证明作为射影平面几何基础的笛沙格定理（证明见第二章 §5）.

第 II 组，顺序公理

II_1. 对于任意直线 u 上的任意三个点 A、B、C，u 上存在点 D，使得点偶 A、B 分离点偶 C、D.

如果点偶 A, B 分离点偶 C、D，则所有四个点 A、B、C、D 都是不同的.

II_2. 如果点偶 A、B 分离点偶 C、D，则点偶 B、A 分离点偶 C、D，而且点偶 C、D 也分离 A、B. 亦即，分离的性质是互相的，而且与所讨论的点偶的顺序无关.

II_3. 对于直线 u 上任意四个不同的点 A, B, C, D，总能有唯一的方法，把它们分成两个分离的点偶.

II_4. 设在直线 u 上给了点 A, B, C, D, E；如果点偶 C, D 和 C, E 都分离点偶 A, B，则点偶 D, E 不分离点偶 A, B.

II_5. 设在直线 u 上给了点 A, B, C, D, E；如果点偶 C, D 和 C, E 都不分离点偶 A, B，则点偶 D, E 也不分离点偶 A, B.

II_6. 设 A, B 和 C, D 是直线 u 上的两个点偶；A', B' 和 C', D' 是它们从任意中心到任意直线 u' 上的投影. 如果点偶 A, B 和 C, D 互相分离，则点偶 A', B' 和 C'、D' 也互相分离，这就是说，两个点偶的分离性质在中心投影下是不变的.

在 II_6 的基础上，可以给出平面上同一直线束中分离的或不

分离的射线偶的定义.

如果 a,b 和 c,d 是通过一个点的四条直线，而且 u 是任意直线，与 a,b 和 c,d 分别相交在点 A,B 和 C,D，则从公理 II_6，点偶 A,B 和 C,D 对于任意选择的直线 u，或者总是分离的，或者总是不分离的．在第一种情形下，我们就说直线偶 a,b 和 c,d 互相分离，在第二种情形下则说它们不分离.

假设射影空间沿着一个平面切开了，那个平面我们称它为无穷远平面，那么在每条普通直线上点的集合里可引进“一点在两点之间”的关系.

定义32.1 如果 O_∞ 是一条普通直线 a 上的无穷远点，A,B,C 是 a 上另外三点，如果点偶 C,O_∞ 分离点偶 A,B，则我们说 C 在 A,B 之间.

这样在 I_{1-9}，II_{1-6} 的基础上，就可将挖去无穷远点的射影直线上的有穷点排成顺序，而且只有两种不同排法，这两种排法的顺序正好相反，我们称它们为在射影直线上的线性顺序

第 III 组，连续公理（戴德金（Dedekind）公理）

III．设 a 是任意的射影直线，在一个点 O_∞ 处切开，如果把这直线上除 O_∞ 外的点分为两类，使得：

（1）每个点属于一个而且只属于一个类；

（2）每个类至少含有一个点；

（3）在直线 a 上的两个线性顺序的一个里，第一个类的每个点都在第二个类的每个点前面，那末或者第一个类里有着一个点，它在这个类的所有其他的点后面，或者第二个类里有一个点，它在这个类的所有其他的点前面.

简言之，对于切开的射影直线上点的有序集合里，每个戴德金切割的两个类中，恰好有一个类有边界点.

三组公理 I_{1-9}，II_{1-6}，III 构成一个完整的公理体系，在这基础

上可以证明全部三维射影几何的定理，而且在射影直线上可以引进坐标系，使得在挖去无穷远点的射影直线上所有点的集合与所有实数的集合间建立一一对应关系.

§ 33 公理体系的三个基本问题

希尔伯特不仅提出了到当时为止关于欧氏几何的一组最令人满意的公理系统，还阐明了公理系统的三个基本问题，即公理体系的和谐性，公理体系中各条公理的独立性，和公理体系的完备性.

33.1 公理体系的和谐性

和谐性也称为相容性或无矛盾性，这个性质是几条公理能够构成一组公理体系的首要条件，它的意义很明显，就是以这几条公理为根据，不论推论到多远，决不会出现相互矛盾的命题. 如果公理体系满足这个要求，那么就称这个公理体系具有和谐性. 现在把这个意义明确地规定如下:

定义 33.1 如果命题 $\bar{A}$ 的假设与命题 A 的假设相同，而命题 $\bar{A}$ 的结论与命题 A 的结论正相反，则称 $\bar{A}$ 为 A 的矛盾命题. 因此矛盾命题是相互矛盾的.

定义 33.2 如果一组公理体系连同它的一切推论在内，不含有相互矛盾的命题，则称这组公理体系具有和谐性.

任何一组公理体系，如果是有意义的话，一定要具有和谐性. 例如在射影几何公理系统 I_{1-9}, II_{1-6}, III 以外再加上命题"在一平面上过直线外一点只能作一直线与已知直线不相交"作为公理，则这个体系就不具有和谐性，因为这命题与 I_9 矛盾. 有内在矛盾的体系不能作为任何一种几何的推理基础.

对于任何一组公理体系，都要首先考虑它的和谐性，因此就产生了如何判断一个公理体系是否具有和谐性的问题．譬如欧氏几何的公理、定理合起来不止千条，而且新定理还可能继续出现，所以不可能用穷举法把所有定理拿来一一比较，来断定这些定理与公理中是否有相互矛盾的命题存在．因此关于公理体系和谐性的证明，需要用新的方法．

人们为了证明公理体系的和谐性，常用模型法，这个方法的主要思想是把一种已经存在的实物，作为公理体系的对象，把公理体系的对象间的关系解释为这种实物间的一些具体关系．于是抽象的公理体系就由这种实物和实物间的具体关系得到了一个实现．这个实现称为公理体系的解释或模型．如果这种实物与实物的具体关系没有矛盾，那么公理体系就符合和谐性，否则公理体系的矛盾性将反映成为这种实物和实物间具体关系的矛盾性．所以抽象的公理体系的和谐性问题，是依靠某种具体实物所作的模型来证明的．

例1 证明公理 I_{1-3} 是和谐的．

我们构造一个模型．如图 33-1，在平面上取定不共线三点 A,B,C．另取点 D,E,F 分别与 B,C；C,A；A,B 共线并且 AD，BE，CF 交于一点 G．

现在规定 I_{1-3} 中的基本对象与基本关系是模型里某些特定的对象与关系如下表：

公理 I_{1-3} 的基本概念	在模型里的解释
点	A, B, C, D, E, F, G
直　线	$AGD, BGE, CGF, AFB, BDC, CEA, DEF$
点在直线上	直线里含有表示点的字母

根据以上规定，不难验证公理 I_{1-3} 都成立，因此公理 I_{1-3} 是和

谐的．我们还知道这个模型是满足 I_{1-3} 的包含点与直线个数最少的模型（七个点，七条直线）．

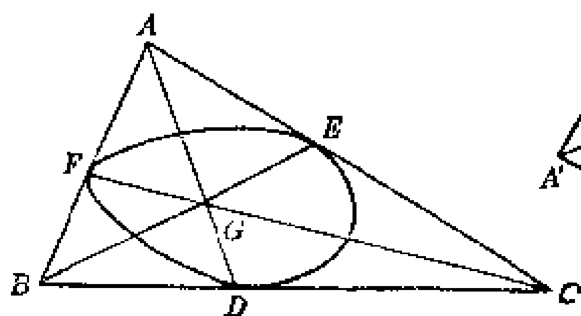


图 33-1

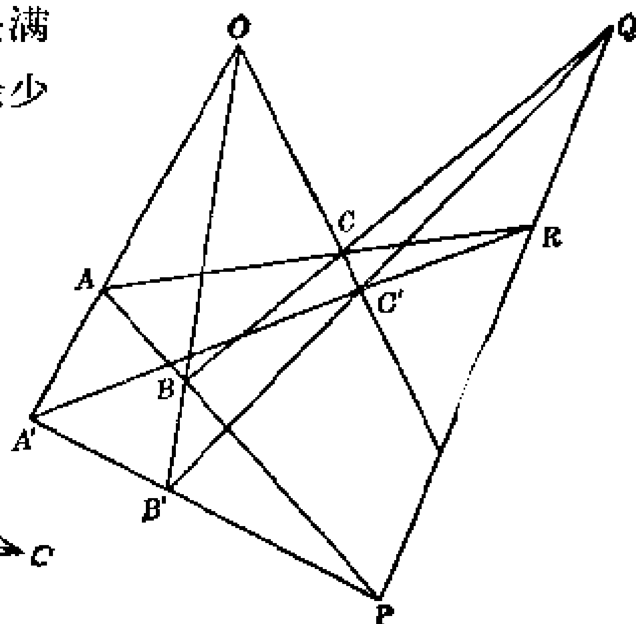


图 33-2

例 2 证明 I_{2-9} 是和谐的．

考虑如图 33-2 的具体事物 M，且规定点是指 $A, B, C, A', B', C', O, P, Q, R$（十个）．直线是指 $AB, BC, CA, \cdots$（十条），平面是指 $OAB, OAC, OBC, ABC, A'B'C'$（五个），点线结合关系，点面结合关系，都以普通意义理解．

那么，不难验证，在此规定下 I_{2-9} 都成立，所以 M 是 I_{2-9} 的一个模型，因而公理 I_{2-9} 是和谐的．

应该指出，这种用模型法证明公理体系满足和谐性的方法，并没有彻底解决问题，而这个问题的最后解决还要依赖于实践．因为，我们在为公理体系做模型时，必须先确认作为模型的事物存在的前提下，这组公理是和谐的．因此，这样证明和谐性问题是有条件的，相对的．例如，我们可以在承认实数的算术运算和谐的前提下，证明欧氏几何是和谐的．并且可以在承认欧氏几何和谐的前提下，证明罗氏几何是和谐的．

33.2 公理体系的独立性

首先利用“公理体系的模型”这个概念来说明另一个概念的意义，即“由公理体系Σ不能推出某一个命题 P”的意义，这句话可以记作：“$\Sigma \not\Longrightarrow P$”.

要证明“$\Sigma \not\Longrightarrow P$”，须用作模型的方法．因为在公理体系Σ的任何模型里，Σ的所有公理都成立，所以由公理体系Σ推出的任何定理在模型中也一定成立，即

若 $\Sigma \Longrightarrow P$，则 P 在Σ的每个模型中成立．换句话说（取上命题的反申语）：

若存在Σ的一个模型，在其中 P 不成立，则 $\Sigma \not\Longrightarrow P$.

由此可见，欲证明“$\Sigma \not\Longrightarrow P$”，只要设法作出Σ的一个模型，在其中 P 不成立．

注意：1．“由Σ不能推出命题“与”由Σ没有推出命题 P”意义是完全不同的．

2．如果 P 是在公理体系Σ里有意义的命题，则 P 在Σ中可能有三种情况．

$\Sigma \Longrightarrow P$（P 在Σ中成立，所以 P 在Σ的一切模型里成立．）

$$\Sigma \not\Longrightarrow P \begin{cases} \Sigma \Longrightarrow \bar{P} & (P\text{ 在}\Sigma\text{中不成立，且 }P\text{ 在模型里不成立}) \\ \Sigma \not\Longrightarrow P & (P\text{ 在}\Sigma\text{的某些模型里成立，在某些模型里不成立}). \end{cases}$$

“$\Sigma \Longrightarrow P$”及“$\Sigma \Longrightarrow \bar{P}$”的证明都是用演绎法推证出来，而“$\Sigma \not\Longrightarrow P$”的证明须用作模型的方法．

现在说明公理体系独立性的意义，所谓公理体系Σ的独立性是要求Σ里的每一条公理都是必要的，这就是说，Σ中的每一条公理都不与其他的公理相关，即不能用逻辑的方法从Σ的其他公理

推出．因此，在这种情况下，Σ就不可能去掉它的任何一条公理的要求，而还保留同样多的结论，所以独立性问题，也就是在保留同样多的推论的前提下，公理体系所含公理的最少个数问题．

设公理体系Σ包含有n条公理，记作$\Sigma\equiv\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，一般来说，这$n$个公理的次序是排好了的，不能任意变更，（如在公理体系I—III中，III不能移作第一组公理，因无结合、顺序概念作准备，它本身就无意义了），这样关于公理体系的独立性有两种含意．

定义 33.3 如果公理体系$\Sigma\equiv\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$中的某个公理$A_i(1\leqslant i\leqslant n)$不能由前面$i-1$个公理$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$推出，则称$A_i$在$\Sigma$中是顺序独立的；如果$A_i$不能由$\Sigma$的所有其余$n-1$个公理$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_n$推出，则称$A_i$在$\Sigma$中是绝对独立的，如果$\Sigma$中每个公理都是顺序独立的，则称$\Sigma$是顺序独立的；如果$\Sigma$中每个公理都是绝对独立的，则称$\Sigma$是绝对独立的．

显然，比较两种独立性的含意，我们看到绝对独立性隐含着顺序独立性．

如何证明A_i在Σ中是独立的呢？如果存在一个模型M，在其中$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_n$都成立，而$A_i$不成立，则

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_n\}\not\Longrightarrow A_i$$

这就是说，如果公理体系

$$\Sigma'\equiv\{A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, \overline{A}_i, A_{i+1}, \cdots, A_n\}$$

是和谐的，则A_i在Σ中是绝对独立的．

关于公理的顺序独立可以作出类似的结论．

因此，如果公理Σ中有n条公理，要证明Σ的独立性，就需要作出n个模型．

33.3 公理体系的完备性

对于公理体系完备性的意义，有两种不同的意义：

(1) 完备性的意义，指的是满足公理系统的对象已经组成了最广义的集合，不允许再加入其他新元素.

(2) 完备性的意义不是对公理的对象要求的，而是指公理体系自身；就是说，如果公理体系是完备的，那么我们就不能够把新的公理增加到这个体系中去，使之成为一个扩大了的公理体系.

第一种说法是希尔伯特在他的名著“几何基础”里给出的，在他的欧几里得几何公理体系中，关于结合公理、顺序公理、合同公理以及平行公理都与一般所说的相同。关于连续公理，第一个仍是阿基米德公理，但是对于第二个，希尔伯特没有采用康托儿公理，而是采用下面的线性完备公理.

线性完备公理：直线上的点，形成这样的系统，当所有其余公理都成立的条件下，不允许有任何的扩充，使得扩充了以后的点的系统，仍然成立这五组公理.

根据这个公理，可以证明：平面上直线的系统也不允许有所扩充，因为如果存在新的直线，则根据结合公理，就一定会有新的点，这与线性完备公理矛盾.

在这种意义之下，可以证明欧氏几何、罗氏几何以及射影几何的公理体系都是完备的.

现在说明公理体系完备性的第二种说法，它的意义不是对公理的对象要求的，而是指公理体系本身，就是说，如果公理体系是完备的，那么就不能再增加新的公理到这个体系中去，使之成为一个更细致的公理体系.

定义 33.4 如果对某一个公理体系的两个模型 M 与 M' 之间，建立了对象与对象间的一一对应，并且使得 M 中的对象间的一些关系存在 M' 中对应对象间的对应关系，那么这两个模型称为同构的.

定义 33.5 如果某一个公理体系的所有模型都是相互同构

的，则这个公理体系叫做完备的体系.

现在来分析一下这个定义，它一方面包含了希尔伯特的完备意义，即元素对象不允许扩充，另一方面也包含了公理体系不能扩充的意义. 譬如公理体系有一个模型 M，假设对这个模型允许希尔伯特意义的扩充，即可以加入新的对象使成为模型 M'，则 M 与 M' 之间显然不能有对象间的一一对应. 这就是说，公理体系如果用希尔伯特的意义来说是不完备的，那么用上面的定义来解释仍是不完备的.

再来看允许添加新的公理时的情况：

假设一个公理体系 Σ，允许加入一个与 Σ 中的公理独立的公理 A 使 $\Sigma+A$ 成为一个无矛盾的扩大了的公理体系，则 $\Sigma+A$ 必有一个模型 M，则 M 也是 Σ 的模型. 另一方面，因为 A 有独立性，则 $\Sigma+\bar{A}$ 也是无矛盾的系统，（其中 $\bar{A}$ 是 A 的矛盾命题），设 M' 是 $\Sigma+\bar{A}$ 的模型，则 M' 也是 Σ 的模型.

这样公理体系 Σ 就有两种不同的模型 M 与 M'，它们显然不是同构的.

关于欧氏几何有以下定理：

定理33.1 欧氏几何公理体系是完备的.

这需要证明欧氏几何公理体系的任何模型都与引进笛卡儿坐标的平面上的欧氏几何同构，我们不在这里写出了. 类似地可以确定罗氏几何以及射影几何的完备性.

本节简单介绍了公理体系的三个基本问题，其中和谐性对任何体系都是必须的，但独立性与完备性都不是必需的，数学中有许多重要的公理体系（例如代数里群的公理），正是因为不具有完备性，才有各种不同构的模型，从而显示出广泛的应用.

§ 34　射影几何公理体系的和谐性

这一节里，我们是在承认欧氏几何公理体系满足和谐性的前提下，证明射影几何公理体系是和谐的.

为了简单起见，我们仅就射影几何公理 $I_{1-3,9}$，II_{1-6}，III 来研究，在欧氏空间里作模型.

如图 33-3 取以 O 为中心以 R 为半径的半个球面 Σ，我们把球面上的对径点如 A、A'；B、B'，…看作一个点，并作如下规定：

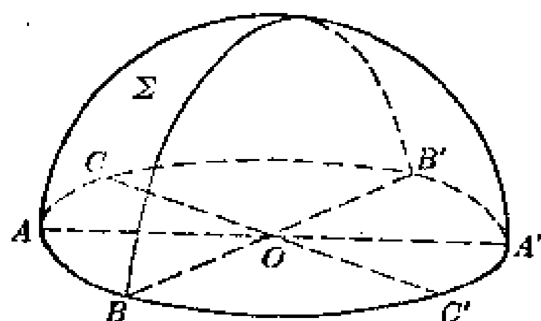


图　33-3

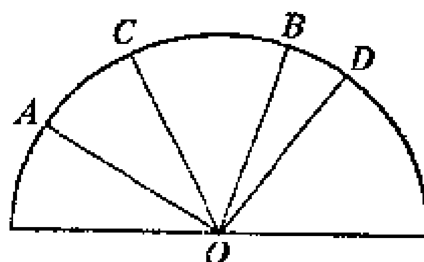


图　33-4

(1) 射影平面即欧氏半球面 Σ.

(2) 射影平面上的点即半球面 Σ 上的点（对径点看作一个点）.

(3) 射影平面上的直线即半球面 Σ 上的大圆弧.

(4) 点在直线上，即点在大圆弧上.

(5) 点在平面上，即点在半球面 Σ 上.

(6) 点偶 C、D 分离点偶 A, B（记作 $AB \div CD$），即对同一大圆弧上四点 A、B、C、D，射线 OC, OD 之一位于 $\angle AOB$ 内部，另一条位于 $\angle AOB$ 外部.（如图 33-4）.

点偶 C, D 不分离点偶 AB（记作 $AB \doteq CD$），即同一大圆弧上四点 A、B、C、D，其中射线 OC, OD 均在 $\angle AOB$ 内部或均在 $\angle AOB$ 外部（如图 33-5）.

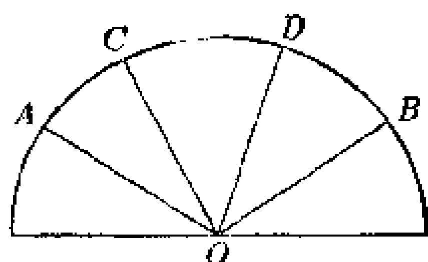


图 33-5-1

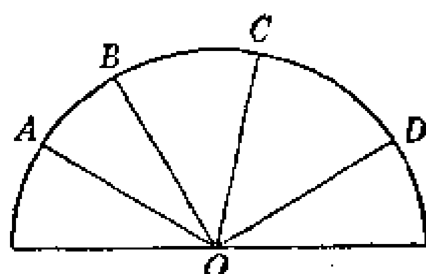


图 33-5-2

可以验证，在以上规定下，公理 $I_{1-3,9}$，II_{1-6}，III 都成立。

先看 $I_{1-3,9}$：

因为在欧氏几何中，过球面上两个非对径点能作一个大圆，所以 I_1 成立，而且这样的大圆只有一个，因此 I_2 也成立．在每个大圆弧上存在无穷多个点，当然存在三个点，而且有三个点不在同一个大圆弧上（当然在 Σ 上不在同一个大圆弧上的点很多，不只三个），所以 I_{1-3} 成立．再者球面上的大圆都相交于两个对径点，而我们已规定对径点当作一个点，所以 I_9 成立。

再看 II_{1-6}：

对于半大圆弧 u 上的任意三个点 A、B、C，有两种情况：

（1）OC 在 $\angle AOB$ 内部，则在 $\angle AOB$ 外部任作射线 OD，交 u 于 D。

（2）OC 在 $\angle AOB$ 外部，则在 $\angle AOB$ 内部任作射线 OD，交 u 于 D。

无论(1)或(2)，总有 $AB \div CD$，且 A、B、C、D 为不同的点，所以 II_1 成立。

显然如果 $AB \div CD$ 时，必有 $BA \div CD$ 且 $CD \div AB$．所以 II_2 成立。

用类似的方法，不难验证 II_{3-6} 也成立。

在欧几里得几何中，圆弧是满足连续公理（戴德金公理）的，所以在模型 Σ 上组 III 即连续公理成立。

因此在欧氏空间所作的这个模型符合射影几何公理 $I_{1-3,9}$, II_{1-6}, III 的一切要求. 这就是说, 在欧几里得几何无矛盾的前提下, 我们证明了射影几何的公理 $I_{1-3,9}$, II_{1-6}, III 无矛盾.

但公理 $I_{1-3,9}$, II_{1-6}, III 作为平面射影几何公理体系是不够的, 因为在这个基础上不能证明笛沙格定理成立, 实际上在没有合同公理的前提下, 笛沙格定理只有在空间射影几何里才能证明, 因此仅就平面射影几何而言必须增加笛沙格定理作为公理, 在这个基础上可以引进一种线段算法, 从而建立一个笛沙格数系, 再利用数系无矛盾, 证明射影平面几何无矛盾. 有关这方面的论证读者可参考D. 希尔伯特著: 几何基础第一册第五章.

第八章　非欧几何学概要

在第四章里曾通过变换群的观点说明射影几何与其他几种几何的关系．本章是在复射影平面上利用射影测度的概念建立射影几何的各种子几何，主要目的是引进非欧几何学．从这里我们可以给出欧氏几何学与非欧几何学的模型．

在本章我们不是用公理法的观点来讨论非欧几何学，而是简单地介绍在变换群观点下，射影平面上的非欧几何模型．我们主要讨论罗氏几何学的克莱因-凯莱（Klein-Cayley）的射影几何模型．

§ 35　射 影 测 度

在欧氏几何学中有两个基本量需要测量，即两点间的距离和两直线间的夹角．

现在我们来定义射影测度．

根据拉格儿定理(定理 28.4)，我们将圆环点 I, J 看作退化二级曲线，就可以作以下推广．

在平面内取定一个非退化二级曲线，另选定一个常数 $k(k\neq 0)$．从任意二直线 a, b 的交点作这个二级曲线的切线 p, q（图 35-1），则

$$\omega(a,b)=k\ln(ab,pq)$$

是二直线 a, b 的函数，且有以下性质：

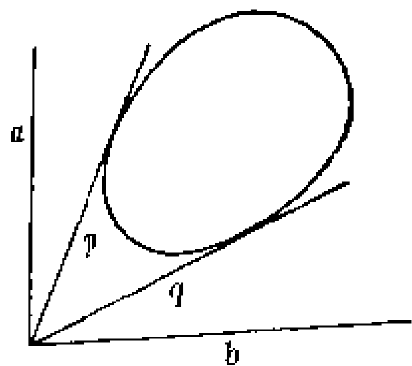


图　35-1

(1) $\omega(a,a)=0$

(2) $\omega(b,a)=-\omega(a,b)$ $(a\neq b)$

(3) $\omega(a, b)+\omega(b, c)=\omega(a, c)$

其中直线 a, b, c 相交于一点.

由于函数 $\omega(a, b)$ 可由二直线 a, b 唯一的(除符号外)确定而且适合上述三条性质. 因此可引入以下定义:

定义 35.1 函数 $\omega(a, b)$ 称为二直线 a 与 b 所成角(或夹角)的射影测度, 预先取定的非退化二级曲线叫做这测度的绝对形. k 称为测度系数.

对偶地, 我们可规定两点距离的射影测度. 在平面内取定一个非退化二阶曲线, 另取定一个常数 $k(k\neq 0)$. 设任意二点 A, B 的连线与二阶曲线交点为 P, Q(图 35-2), 则 $d(A, B)=k\ln(AB, PQ)$ 是二点 A, B 的函数, 且有以下性质:

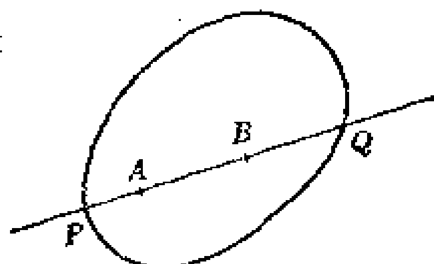


图 35-2

(1) $d(A, A)=0$

(2) $d(B, A)=-d(A, B)(A\neq B)$

(3) $d(A, B)+d(B, C)=d(A, C)$

其中三点 A、B, C 共线.

由于函数 $d(A, B)$ 可由二点 A, B 唯一地(除符号外)确定, 而且适合上述三条性质, 因此可引入以下定义:

定义 35.2 函数 $d(A, B)$ 称为二点 A 与 B 间的距离的射影测度、预先取定的非退化二阶曲线叫作这测度的绝对形, k 称为测度系数.

不难证明下列定理

定理 35.1 如果二直线的交点在绝对形上, 则它们的交角的射影测度等于零.

定理 35.2 平面上任何点与绝对形上任何点距离的射影测度为 ∞.

由定理 35.2 可知作为绝对形的二阶曲线与无穷远直线相当.

下面求出两点距离的射影测度(射影距离)。

设二阶曲线方程为

$$S=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0 \quad (a_{ij}=a_{ji}),\quad |a_{ij}|\neq 0$$

$A(y_1, y_2, y_3)$, $B(z_1, z_2, z_3)$为平面上的两个点.

则直线 AB 与二阶曲线之交点 P, Q 之坐标可以写为 $\rho x_i = y_i-\lambda z_i (i=1,2,3)$。

由于 P, Q 在二阶曲线上, 所以

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}(y_i-\lambda z_i)(y_j-\lambda z_j)=0$$

即

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}y_iy_j-2\lambda\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}y_iz_j+\lambda^2\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}z_iz_j=0$$

亦即

$$S_{zz}\lambda^2-2S_{yz}\lambda+S_{yy}=0 \tag{35.1}$$

解此方程得:

$$\lambda=\frac{S_{yz}\pm i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}{S_{zz}} \tag{35.2}$$

令两个根为 λ_1, λ_2, 即 P, Q 的坐标分别为 $y_i-\lambda_1 z_i$, $y_i-\lambda_2 z_i (i=1, 2, 3)$. 所以

$$(AB, PQ)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{S_{yz}+i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}{S_{yz}-i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}} \tag{35.3}$$

由此得到射影距离公式为

$$d(AB)=k\ln\frac{S_{yz}+i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}{S_{yz}-i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}$$

$$=2k\ln\frac{S_{yz}+i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}{\sqrt{S_{yy}\cdot S_{zz}}} \tag{35.4}$$

类似地可以求出夹角的射影测度(射影角度)的表达式.

设二级曲线的方程是 $T=\sum_{i,j=1}^{3}a'_{ij}u_iu_j=0(a'_{ij}=a'_{ji}),|a'_{ij}|\neq 0$，二直线 a,b 的坐标为$[a_1,a_2,a_3]$，$[b_1,b_2,b_3]$。

由 a,b 二直线的交点作二级曲线的切线 p,q，则 p,q 的坐标为 $\rho u_i=a_i-\lambda b_i$ $(i=1,2,3)$，设

$$T_{aa}=\sum_{i,j=1}^{3}a'_{ij}a_ia_j,\qquad T_{ab}=\sum_{i,j=1}^{3}a'_{ij}a_ib_j$$

$$T_{bb}=\sum_{i,j=1}^{3}a'_{ij}b_ib_j$$

则
$$\lambda=\frac{T_{ab}\pm i\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}{T_{bb}}$$

以 λ_1,λ_2 表示这两个根，则 p,q 的坐标是 $a_i-\lambda_1b_i$，$a_i-\lambda_2b_i$ $(i=1,2,3)$．因此

$$(ab,pq)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{T_{ab}+i\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}{T_{ab}-i\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}$$

所以
$$\omega(a,b)=2k\ln\frac{T_{ab}+i\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}}\tag{35.5}$$

射影测度是凯莱于1859年首先建立的，后来克莱因发现它对于了解非欧几何学非常重要．二阶曲线有实虚两种情况，若绝对形为实二阶曲线，则可以构成罗氏几何，若绝对形为虚二阶曲线，则可以构成黎氏几何学，这两种几何合称为非欧几何学，这样非欧几何就可以从射影测度的概念导出，然而射影测度是用交比概念定义的，它属于射影性质，因此可以认为非欧几何能从射影几何导出。

§36　双曲运动群和椭圆运动群

36.1　自同构群

如果任意给定的空间 S 和该空间到自身的某变换群 G 中的一

个变换 g，把空间 S 中的一个点集 U 变换到 U 自身，我们称 g 是关于 U 的自同构变换，或简称为关于 U 的自同构.

若变换群 G 的两个变换 g_1, g_2 都是关于 U 的自同构，则其乘积 $g_1 \cdot g_2$ 也是关于 U 的自同构，而且如果 g 是 U 的一个自同构，则 g^{-1} 也是 U 的自同构，因此变换群 G 中关于 U 的自同构变换全体构成一个变换群，称为关于 U 的自同构群，它是 G 的子群.

例如在射影平面上任取一直线称它为无穷远直线记为 l_∞，则射影平面保持 l_∞ 不变的自同构射影变换构成二维射影群的子群，即仿射变换群.

36.2 双曲运动群和椭圆运动群

在射影平面上取定一条非退化的实二阶曲线 k，取 k 的一个自极三点形为坐标三点形时，由 §24 知二阶曲线的方程是 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$. 平面上关于 k 的自同构变换也构成射影变换群的子群.

一条实的二阶曲线 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 把射影平面分为两个区域，凡是满足条件：$x_1^2+x_2^2-x_3^2<0$ 的点称为内点，而满足条件 $x_1^2+x_2^2-x_3^2>0$ 的点则称为外点.

我们把关于实二阶曲线 k 的自同构变换称为双曲射影运动，而这条与双曲射影运动关联的非退化二阶曲线称为绝对形.

具有公共绝对形的双曲射影运动的全体构成射影变换群的子群，称为双曲运动群，研究双曲运动群下的不变性质与不变量的几何称为双曲几何.

如果 k 是一条虚二阶曲线 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$，则也存在关于 k 的自同构，同时把任一已知点变到任意指定位置去，但这时关于 k 无所谓内点与外点之分了.

我们把关于非退化虚二阶曲线的自同构称为椭圆射影运动，这时的绝对形就是取定的非退化虚二阶曲线，具有公共绝对形的

椭圆射影运动的全体构成一个椭圆运动群，它也是射影变换群的子群，研究椭圆运动群下不变性质与不变量的几何称为椭圆几何.

§37 罗氏几何的克莱因模型

在§31里曾提到罗氏几何，这种几何是把欧氏几何的平行公理改为以下命题.

罗氏平行公理：通过已知直线外一已知点存在两直线与该直线共面不相交.

欧氏几何的其余公理保持不变. 罗氏几何是非欧几何的一种.

1871年克莱因利用凯莱所创立的射影测度的概念来说明非欧几何学，构成了罗氏几何的克莱因模型，现在说明这个模型.

在射影平面上取定一条实非退化二阶曲线 Γ: $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 为绝对形，我们规定绝对形 Γ 内部的点叫做双曲点，绝对形 Γ 的弦叫做双曲直线，因为 Γ 上的点不算作双曲几何的点，所以双曲直线是开的(没有端点).

根据以上规定，任意两个双曲点决定唯一一条双曲直线.

对于两条双曲线段 AB 和 $A'B'$，如果存在着关于 Γ 的自同构把 AB 变到 $A'B'$ 时，则称 $AB\equiv A'B'$.

同理对于两个双曲角$\angle(l_1, l_2)$，$\angle(l_1', l_2')$，如果存在着关于 Γ 的自同构把$\angle(l_1, l_2)$变到$\angle(l_1', l_2')$去时，则称$\angle(l_1, l_2)\equiv\angle(l_1', l_2')$(如图37-1).

现在进一步研究在双曲几何中，罗氏平行公理是否成立，因为这时过已知直线 l 外一点 M 可以作无数多条直线与 l 不相交，我们定义相交于绝对形上的点(称为无穷远点)的两条直线称为平行线，因此过 M 与 l 平行的直线恰有两条，即 MC, MD(图37-2).

由定理35.2可得M到C或M到D的距离都是无穷大量，且

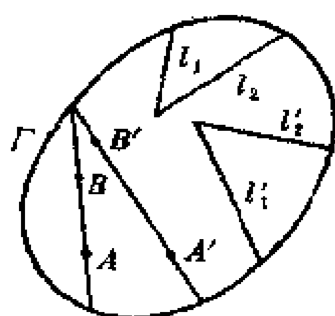


图 37-1

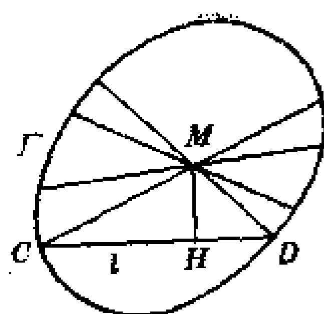


图 37-2

由定理 35.1 可知$\angle MCD$ 和 $\angle CDM$ 的射影测度都等于零.

根据前面的讨论可以得出结论：在射影平面上的实绝对形的内部定义了射影测度以后，就建立了罗巴切夫斯基几何的模型，这个模型就是罗氏几何的射影几何模型，称为克莱因模型. 因此可以说，我们所定义的双曲几何就是罗氏几何.

以下我们在克莱因模型上计算三角形三内角之和.

从 M 点引直线 l 的垂线 MH(图 37-2), $\angle HMC$ 和$\angle HMD$ 称为平行角. 我们可以证明 $\angle HMC=\angle HMD$ 是距离 $MH=p$ 的函数，我们用 $\delta=\delta(p)$ 表示平行角.

如果两直线 a, b 交点在 Γ 内部，则自交点所作 Γ 之切线为虚直线，所以(35.5)中的 $T_{aa}\cdot T_{bb}-T_{ab}^2>0$, 从而(35.5)之右边为虚数，但 $\omega(a,b)=\varphi$ 为实数，故在(35.5)中取 $k=\frac{i}{2}$, 这时

$$\varphi=\omega(a,b)=i\ln\frac{T_{ab}+i\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}}$$

所以
$$e^{-i\varphi}=\frac{T_{ab}+i\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}},$$

$$e^{i\varphi}=\frac{T_{ab}-i\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}}$$

因此
$$\cos\varphi=\frac{T_{ab}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}},$$

$$\sin\varphi = \frac{-\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}}$$

结论：设交于 Γ 内部之二直线 a, b 之交角为 φ，则 $\cos\varphi = \frac{T_{ab}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}}$.

因为 Γ 的方程为 $u_1^2+u_2^2-u_3^2=0$，所以这里的 $T_{aa}=a_1^2+a_2^2-a_3^2$，$T_{ab}=a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3$，$T_{bb}=b_1^2+b_2^2-b_3^2$。

特别地当 $a\perp b$，即 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$T_{ab}=0$。

其次，设 A, B 为 Γ 内两点，A, B 连线与 Γ 交于 P, Q，因为 P、Q 都是实点，所以(35.4)中 $S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2<0$，又 $d(AB)$ 为实数，故 k 值必须是实数，设 $k=\frac{\alpha}{2}$，α 是实数，则

$$d=d(AB)=\alpha\ln\frac{S_{yz}+i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}{\sqrt{S_{yy}S_{zz}}}$$

从此得出

$$e^{\frac{d}{\alpha}}=\frac{S_{yz}+i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}{\sqrt{S_{yy}S_{zz}}}$$

$$e^{-\frac{d}{\alpha}}=\frac{S_{yz}-i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}{\sqrt{S_{yy}S_{zz}}}$$

于是

$$\cosh\frac{d}{\alpha}=\frac{1}{2}(e^{\frac{d}{\alpha}}+e^{-\frac{d}{\alpha}})=\frac{S_{yz}}{\sqrt{S_{yy}S_{zz}}}$$

$$\sinh\frac{d}{\alpha}=\frac{1}{2}(e^{\frac{d}{\alpha}}-e^{-\frac{d}{\alpha}})=\frac{\sqrt{S_{yz}^2-S_{yy}S_{zz}}}{\sqrt{S_{yy}S_{zz}}}$$

或

$$\tanh\frac{d}{\alpha}=\frac{\sqrt{S_{yz}^2-S_{yy}S_{zz}}}{S_{yz}} \tag{37.1}$$

其中

$$S_{yy}=y_1^2+y_2^2-y_3^2,\quad S_{yz}=y_1z_1+y_2z_2-y_3z_3$$

$$S_{zz}=z_1^2+z_2^2-z_3^2$$

α 是测度单位.

现在我们计算平行角 δ, 如图 37-2, 取直线 l 为坐标三角形的一边, 设其方程为 $x_1=0$, M 点的坐标为(m_1, m_2, m_3), 绝对形 Γ 之方程为 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$, 这时 l 之极点之坐标为$(1, 0, 0)$, 直线 $MH\perp l$, 所以 MH 应过 l 之极点$(1, 0, 0)$, 因此 MH 之方程为 $m_3x_2-m_2x_3=0$, 它和 l 之交点H之坐标为$(0, m_2, m_3)$, 这时

$$S_{yy}=m_1^2+m_2^2-m_3^2,\quad S_{yz}=m_2^2-m_3^2,\quad S_{zz}=m_2^2-m_3^2$$

所以

$$\tanh\frac{p}{\alpha}=\frac{\sqrt{S_{yz}^2-S_{yy}S_{zz}}}{S_{yz}}$$

$$=\frac{\sqrt{-m_1^2(m_2^2-m_3^2)}}{m_2^2-m_3^2}=\frac{m_1}{\sqrt{m_3^2-m_2^2}}\quad(37.2)$$

因为 l 之方程为 $x_1=0$, 所以它与 Γ 之交点为$(0, 1, 1)$和$(0, 1, -1)$, 取D之坐标为$(0, 1, 1)$, 则 MD 之方程为$(m_2-m_3)x_1-m_1x_2+m_1x_3=0$, 所以 MD 之线坐标为$[m_2-m_3, -m_1, m_1]$, MH 之坐标为$[0, m_3, -m_2]$, 现在计算 MD, MH 之夹角 δ, 因为

$$T_{aa}=m_3^2-m_2^2,\ T_{bb}=(m_2-m_3)^2,\ T_{ab}=m_1(m_2-m_3)$$

所以

$$\cos\delta=\frac{T_{ab}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}}=\frac{m_1}{\sqrt{m_3^2-m_2^2}}$$

由(37.2)得

$$\cos\delta=\frac{m_1}{\sqrt{m_3^2-m_2^2}}=\tanh\frac{p}{\alpha}$$

所以
$$\tan\frac{1}{2}\delta=\sqrt{\frac{1-\cos\delta}{1+\cos\delta}}=\sqrt{\frac{1-\tanh\frac{p}{\alpha}}{1+\tanh\frac{p}{\alpha}}}$$

$$=\frac{\left(1-\dfrac{e^{\frac{p}{a}}-e^{-\frac{p}{a}}}{e^{\frac{p}{a}}+e^{-\frac{p}{a}}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\dfrac{e^{\frac{p}{a}}-e^{-\frac{p}{a}}}{e^{\frac{p}{a}}+e^{-\frac{p}{a}}}\right)^{\frac{1}{2}}}=e^{-\frac{p}{a}}$$

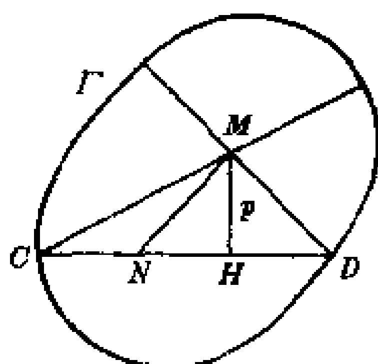


图 37-3

因此 $\delta=2\tan^{-1}(e^{-\frac{p}{a}})$

同理可得 $\delta=\angle HMC=2\tan^{-1}(e^{-\frac{p}{a}})$

从此可看出：只有当 $p\to 0$ 时，$\frac{\delta}{2}\to\frac{\pi}{4}$，即 $\delta\to\frac{\pi}{2}$，而当 p 取非零有限值时 $\delta=\delta(p)<\frac{\pi}{2}$.

现在我们计算三角形三内角之和，先看直角三角形 MHN，当 N 由 C 移向 H 时，$\angle MNH$ 由 0 连续增加到 $\frac{\pi}{2}$，同时 $\angle NMH$ 由 $\delta(p)$ 连续减少到 0. 但因 $\delta(p)<\frac{\pi}{2}$，所以当 N 由 C 移向 H 时，$\angle MNH$ 连续增加的幅度 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 大于 $\angle NMH$ 连续减少的幅度 $(\delta(p),0)$，其结果是直角三角形 NMH 的内角和连续地增加，当 N 重合于 C 时，$\triangle NMH$ 就是 $\triangle CMH$，它的内角和为：

$$0+\delta(p)+\angle CHM<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

当 N 重合于 H 时 $\triangle NMH$ 变成两条重合直线 MH，在这极限情况下其内角和等于

$$\angle MNH+\angle MHN+\angle NMH=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+0=\pi$$

因此当 N 点由 C 移向 H 时，$\triangle NMH$ 的内角和由小于 π 连续地增加到 π. 但极限情况下的两条重合直线不能算直角三角形，所以

绝对形 Γ 内任何一个直角三角形的三内角之和小于 π.

因为任何三角形可以看作是由两个直角三角形拼成的，所以 Γ 内任何一个三角形的三内角之和小于 π.

以上我们在克莱因模型里证明了罗氏几何的一些命题（并未验证罗氏几何的全部公理），由此看到罗氏几何与欧氏几何有很大不同，在罗氏几何里过一点可以引无穷多直线与已知直线共面不相交，其中有两条是已知直线的平行线；三角形的内角和小于 π. 当然还可以在这个模型里讨论罗氏几何的其他命题.

§ 38 黎曼几何的模型

当我们以非退化的虚二阶曲线为绝对形，在射影平面上取前面的射影测度，则这时的射影平面由于其上任意两直线均相交，因此构成了黎曼几何的一种模型.

下面只作简略介绍.

这时绝对形的方程可写为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$$

我们规定以射影平面上的点为点，直线为直线，仍取前面的射影测度，就可以构成黎曼几何学（或称椭圆几何学）.

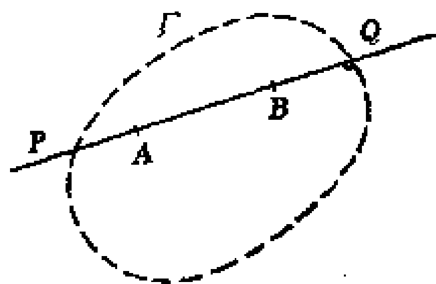


图 38-1

因为二次曲线是虚的，所以任意两点 $A(y_1, y_2, y_3)$，$B(z_1, z_2, z_3)$ 的连线和它的交点 P, Q 也是虚的，又 P, Q 之坐标分别可写为 $y_i-\lambda_1 z_i$ 和 $y_i-\lambda_2 z_i$ $(i=1, 2, 3)$，其中 λ_1, λ_2 是共轭虚数. 为了使 A, B 两点间的距离是实数，我们在(35.4)中取 $k=\dfrac{i\alpha}{2}$，则

$$d(AB)=i\alpha\ln\frac{S_{yz}\pm i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}{\sqrt{S_{yy}S_{zz}}}$$

所以

$$e^{-i\frac{d}{\alpha}}=\frac{S_{yz}+i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}{\sqrt{S_{yy}S_{zz}}}$$

$$e^{i\frac{d}{\alpha}}=\frac{S_{yz}-i\sqrt{S_{yy}S_{zz}-S_{yz}^2}}{\sqrt{S_{yy}S_{zz}}}$$

因此

$$\cos\frac{d}{\alpha}=\frac{S_{yz}}{\sqrt{S_{yy}S_{zz}}}$$

我们取 A 为定点，B 为动点，当 B 与 A 重合时 $S_{yy}=S_{zz}=S_{yz}$，$\cos\frac{d}{\alpha}=1$. 因而 $d=0$. 当 B 移动到 A 点的极线上时，$S_{yz}=0$. 这时 $\cos\frac{d}{\alpha}=0$. $\frac{d}{\alpha}=\frac{\pi}{2}$, $d=\alpha\frac{\pi}{2}$, 所以 A 点到它的极线上的点之间的距离等于 $\alpha\frac{\pi}{2}$. 当 B 点继续远离到与 A 点的距离等于 $\alpha\pi$ 时，$\left|\cos\frac{d}{\alpha}\right|=1$, 这时 $S_{yy}S_{zz}=S_{yz}^2$, 因此 $e^{-i\frac{d}{\alpha}}=e^{i\frac{d}{\alpha}}$, 所以 $d=0$, 也就是说 B 点又回到了 A 点的位置.

以上说明了在这个模型里，不存在无限远点，不存在不相交的直线，所以过直线外的点不存在与已知直线平行的直线.

同样，因为二次曲线是虚的，所以由二直线 a, b 的交点所引的两条切线 p, q 也是虚的，为了使得 a, b 二直线间的角度是实数，所以我们在(35.5)内取 $k=\frac{i}{2}$, 则

$$\theta=\omega(a,b)=i\ln\frac{T_{ab}+i\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}}$$

所以

$$e^{-i\theta}=\frac{T_{ab}+i\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}}$$

$$e^{i\theta}=\frac{T_{ab}-i\sqrt{T_{aa}T_{bb}-T_{ab}^2}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}}$$

因此

$$\cos\theta=\frac{T_{ab}}{\sqrt{T_{aa}T_{bb}}}$$

当 $T_{ab}=0$时，也就是说当 a、b 是共轭直线时，$\cos\theta=0, \theta=\frac{\pi}{2}$. 因此，共轭直线是互相垂直的.

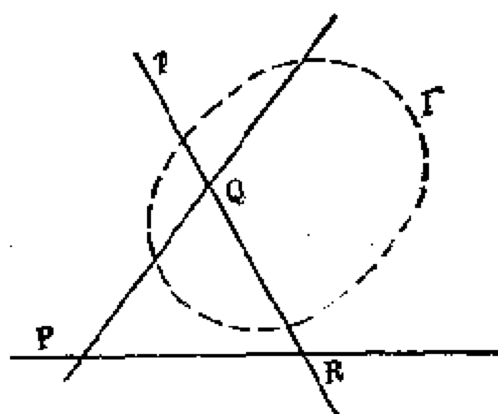


图 38-2

设平面上任一点 P, P 点关于绝对形 Γ 的极线为 p，过 P 任作二直线交 p 于 Q, R；则 PQ 与 p 为共轭直线；同样 PR 与 p 也是共轭直线，所以 $\angle PRQ$ 与 $\angle PQR$ 都等于$\frac{\pi}{2}$. 这时 $\triangle PQR$ 有两个内角等于$\frac{\pi}{2}$, 所以三角形三内角之和大于 π. 这正是黎氏几何与欧氏几何和罗氏几何最重要的区别. 在黎氏几何中过一点不存在直线与已知直线平行，三角形三内角之和可能大于 π.

黎氏几何学是德国人黎曼 (B. Riemann, 1826—1866) 创立的.

罗氏几何与黎氏几何合称非欧几何学.

习　题

1. 证明两条平行线所成的交角等于 0.

2. 证明：

(1) $d(A, B)=-d(B, A)$, $d(A, A)=0$

(2) 如果 A, B, C 是同一直线上的三点，则

$$d(A, B)+d(B, C)=d(A, C)$$

3. 在实绝对形 k 内，试证和定点 P 成等距的点的轨迹是一条二次曲线.

4. 在黎氏几何模型内，试作一个三角形，它的三内角全等于 $\frac{\pi}{2}$.

附录　一般体(域)上的射影几何简介

§1　预备知识

在本附录中我们将简单地介绍一般体或域上的射影几何与仿射几何. 在本节里, 首先对所需要的向量空间的概念作扼要的说明,读者想作更详细了解可以参考任何一本“高等代数”或“线性代数”教材.

1.1　群

给定一个集合 G, 如果在这集合中可引进运算“$\circ$”: $G\times G\to G$, 即对于 $\forall a,b\in G$, $(a,b)\longmapsto a\circ b$ 并且满足以下四条性质:

(i) 封闭性: 即对于 $\forall a,b\in G$, 有 $a\circ b\in G$,

(ii) 结合性: 即对于 $\forall a,b,c\in G$, 有

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)=a\circ b\circ c$$

(iii) 存在单位元素 $e\in G$, 即对于 $\forall a\in G$, 有

$$a\circ e=e\circ a=a$$

(iv) 存在逆元素, 即对于 $\forall a\in G$, 存在元素 $a^{-1}\in G$ 使得

$$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$$

则称集合 G 关于运算 $\circ$ 是一个群. 如果这个群的运算更满足:

(v) 交换律: 即对于 $\forall a,b\in G$,

$$a\circ b=b\circ a$$

则这个群称为交换群或 Abel 群.

实例　(1) 整数集 Z 引进加法运算后, 构成一个 Abel 群, 单位元素是 0.

(2) 正有理数集 Q^+ 引进乘法以后构成一个 Abel 群，单位元素是 1.

1.2 体

给出一个集合 F，如果在这个集合中可以引进两种运算"+"和"×"，分别称为加法和乘法. F 对于加法是Abel 群；设加法群F 的单位元素是 0，$F^* = F - \{0\}$对于乘法是一般群；并且加法和乘法运算是相容的，即满足分配律：对于 $\forall a, b, c \in F$，有等式

$$(a+b)\times c = a\times c + b\times c$$

$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c$$

则F 称为一个体. 如果体 F 对于运算"×"也是 Abel群，则 F 称为一个域.

体 F 中乘法的单位元素记成 1.

实例 (1) 有理数集 Q，实数集 R 和复数集 C 都是域.

(2) 四元数集 H 是体.

1.3 向量空间

(1) 向量空间的定义

给出一个体 F 和另外一个集 V，如果对于这两个集合能引进 F 与 V 的乘法运算 $F\times V\to V$：对于 $\forall x\in F, a\in V, (x, a)\longmapsto xa$，和 V 中的加法运算 $V\times V\to V$：对于 $\forall a, b\in V, (a, b)\longmapsto a+b$，如果这两种运算满足以下性质：

(i) V 对于加法构成一 Abel群.

(ii) F 与 V 的乘法运算满足结合律，即对于 $\forall x, y\in F, a\in V$，有

$$(xy)a = x(ya)$$

(iii) 设 1 是乘法群 F^* 的单位元素，则对于 $\forall a\in V$ 有

$$1a=a$$

(iv) 这两种运算是相容的，即满足分配律：对于 $\forall x, y\in F, a, b\in V$ 有

$$x(a+b)=xa+xb$$

$$(x+y)a=xa+ya$$

则 V 称为体 F 上的向量空间，V 的元素称为向量，F 中的元素称为数，运算 $F\times V\rightarrow V$ 称为数乘，运算 $V\times V\rightarrow V$ 称为向量的加法。V 的作为加法群的单位元素称为零向量，记成 O_V 或 O。

实例 全体有序 n 数组的集$\{(a_1, a_2, \cdots a_n), a_i\in F\}$，如果引进数乘和加法如下

$$k(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n), k\in F,$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)+(b_1, b_2, \cdots b_n)=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$$

则构成一向量空间，记成 F^n。

(2) 向量子空间

F 上向量空间 V 的子集 M，如果它本身对于 V 中的数乘和加法运算也是一向量空间，则称为 V 的向量子空间。

实例 V 中一组向量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 称为线性无关的，如果对于一组数 $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_i\in F$，等式

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_k a_k=0\Longrightarrow x_i=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, k)$$

给出 V 中一组线性无关的向量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，则集合

$$M=\{b\in V \mid b=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_k a_k, x_i\in F\}$$

是 F 上的一向量空间，称为 V 中由向量组$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$所张成的向量子空间，记做$[a_1, a_2, \cdots, a_k]$。

容易证明，如果 M 和 N 分别是 V 的向量子空间，则它们之交 $M\cap N$ 也是 V 的向量子空间。

如果 M 和 N 是 V 的向量子空间，包含它们的最小的向量子空间称为 M 和 N 的和，记成 $M+N$。特别地，如果 $M\cap N=0$，则

$M+N$ 称为 M 和 N 的直和，记成 $M\oplus N$。一般地，包含向量子空间 $M_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的最小向量子空间叫做它们的和，记成 $M_1+M_2+\cdots+M_k$，或 $+(M_i)(i=1,2,\cdots,k)$。如果更有 $M_i\cap M_j=0$ $(i\neq j)$，则称 $M_1+M_2+\cdots+M_k$ 为直和，记成 $M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_k$ 或 $\oplus(M_i)(i=1,2,\cdots,k)$。

容易证明，如果 $v\in M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_k$，则 v 可以唯一地分解成 $v=v_1+v_2+\cdots+v_k$，其中 $v_i\in M_i(i=1,2,\cdots,k)$。

(3) 向量空间的基底和维数

设 V 是 F 上的向量空间，如果存在 V 中一组线性无关的向量 a_1，$a_2,\cdots,a_n$ 使得 $V=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，则这组向量 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 称为 V 的一组基底或简称基。n 称为 V 的维数，记成 $n=\dim V$。V 的基底不是唯一的，但是维数是唯一的。

实例 F^n 有一组标准基底 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，其中 $e_i=(0,\cdots 0,\overset{(i)}{1},0,\cdots,0)(i=1,2,\cdots,n)$

(4) 向量空间的线性映射

给出体 F 上的向量空间 V 和 V'，如果给出一个映射 $f: V\to V'$ 使得

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\quad \forall a,b\in V$$
$$f(xa)=xf(a),\quad \forall x\in F, a\in V$$

则 f 称为向量空间 V 到 V' 中的线性映射。向量 $a\in V$ 称为向量 $f(a)\in V'$ 的原象，向量 $f(a)$ 称为向量 a 的象。

V 中的子集 $\ker f=\{a\in V: f(a)=0_{V'}\}$ 称为 f 的核，容易证明，$\ker f$ 是 V 的一向量子空间。

从 V 到 V' 内的全体线性映射的集 $\{f: V\to V'\}$ 记成 $L(V,V')$，容易证明它本身也构成一向量空间。

如果线性映射 f: $V\to V'$ 是到上的而且是一一的，则 f 称为同构，存在同构映射 f: $V\to V'$ 的向量空间称为彼此同构的，特别

地，同构 $f: V\to V$ 称为自同构.

实例 （1）给出 n 维向量空间 V 的一组基底 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$V$ 中任一向量 v 可以唯一地表示成

$$v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

则基底 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 确定了向量空间 V 到 F^n 上的一一对应关系 $v\in V \longmapsto (x_1, x_2, \cdots, x_n)\in F^n$，容易证明这种对应是在上的，并且是一个线性映射，因此是一个同构. 由此推出，维数相同的向量空间彼此同构，因为它们都同构于 F^n.

考虑 V 的自同构 $f: V\to V$，设它把向量

$$v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

映成向量 $v' = x_1' a_1 + x_2' a_2 + \cdots + x_n' a_n$，再设 f 把基底 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 映成向量组 $\{a_1', a_2', \cdots, a_n'\}$，并且

$$a_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

因此有

$$v' = f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i'$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ji} a_j$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' a_i = \sum_{i,j=1}^{n} x_j a_{ij} a_i$$

于是我们得到自同构 $f: V\to V$ 的坐标表达式

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

这说明自同构 $f: V\to V$ 与 $(n\times n)$-矩阵 (a_{ij}) 一一对应. 可以证明：$L(V, V)$ 同构于全体 $(n\times n)$-矩阵所构成的向量空间.

（2）考虑线性映射 $f: V\to V'$，设 V 中的基底是 $\{a_1, a_2, \cdots,$

$a_n\}$，V' 中的基底是$\{a'_1, a'_2, \cdots, a'_n\}$．再设 f 把 V 中的向量

$$v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

映成 V' 中的向量

$$f(v) = x'_1 a'_1 + x'_2 a'_2 + \cdots + x'_m a'_m$$

并且把 V 中的基底$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$映成 V' 中的向量组 $\{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)\}$，如果

$$f(a_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} a'_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则 f：$V \to V'$ 的坐标表达式是

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

因此线性映射 f：$V \to V'$ 一一对应于 $(m \times n)$-矩阵(a_{ij})．可以证明：$L(V, V')$ 同构于全体$(m \times n)$-矩阵所构成的向量空间．

§2　一般体(域)上的射影几何

2.1　射影几何与射影空间

(1)　定义

设 V^{n+1} 是体 F 上的 $(n+1)$ 维向量空间．考虑 V^{n+1} 中全体 1 维、2 维、…、n 维子空间以及 V^{n+1} 所构成的集合，它称为 F 上的 n 维射影几何，记成 $P(V^{n+1})$或 $P(V)$．V^{n+1} 中的 1 维子空间称为 $P(V)$的“点”，2维子空间称为“线”，……，$(k+1)$维子空间称为“k 维平面”，……，n 维子空间称为“超平面”，V^{n+1} 本身称为 n 维射影空间，记成 P^n．因此 $P(V^{n+1})$又可以看成P^n 中“点”，“线”，……，“k 维平面”，……，和超平面的集合，同时由射影几何 $P(V^{n+1})$所确定的射影空间 P^n 是射影几何 $P(V^{n+1})$的所有“点”的集合．

实例 设 $V=R^3$ 是通常的三维欧氏空间，其中建立了笛卡儿直角坐标系，空间中任一点 P 对应坐标 (x,y,z). 我们把 V 看成射影平面 P^2（即二维射影空间），过原点的直线是射影平面上的点，过原点的平面是射影平面上的线. P^2 上全体点和线的集合称为二维射影几何. 考虑以原点为中心的单位球面 S，过原点的直线与 S 交于两点，把这两点等同起来就得到射影平面上的点，因此一个射影平面 P^2 就是把单位球面 S 的对径点（即直径的两端点）粘合起来所构成的图形.

(2) 射影几何中的结合关系

设 V^{n+1} 是体 F 上的 $(n-1)$ 维向量空间，设 S 和 T 分别是 V^{n+1} 的 $k+1$ 维和 $l+1$ 维向量子空间，则 S 和 T 分别是射影几何 $P(V^{n+1})$ 中的 k 维和 l 维平面.

如果 $S\subset T$，则我们说，k 维平面 S 属于 l 维平面 T. 显然 $P(V^{n+1})$ 中所有的点、线、平面都属于 n 维射影空间 $P^n=V^{n+1}$.

子空间 $S+T$ 称为 k 维平面 S 与 l 维平面 T 的联合；子空间 $S\cap T$ 称为 S 与 T 的交. 如果 $S\cap T=0$，这时 $S+T$ 称为 S 与 T 的直和，记成 $S\oplus T$.

不难证明 $P(V)$ 中的结合命题：

例如对于二维射影几何 $P(V^3)$，有：

(i) 两不同点的联合是一直线，

(ii) 两不同线的交是一点.

对于三维射影几何 $P(V^4)$ 有

(i) 两不同点的联合是一直线，

(ii) 两不同平面的交是一直线，

(iii) 两不同的并且相交直线的联合是一平面，

(iv) 两不同的共面直线的交是一点，

(v) 一点与不通过此点的直线的联合是一平面，

(vi) 一平面与不在此平面上的直线的交是一点.

定义 一射影几何 P 到另一射影几何 P' 上的一一对应(点对应点、线对应线等等)π 称为一同构如果它满足条件:

$$M\subset N \Longleftrightarrow \pi(M)\subset\pi(N), \quad \forall M, N\in P$$

如果存在这样的同构,则称 P 和 P' 是同构的.

定理 1 如果同一体上两射影几何 $P(V)$ 和 $P(V')$ 是同维数的,则它们必同构.

证明 向量空间 V 和 V' 的维数相同, 所以存在同构 $f: V\to V'$, 则对于 V 的任一子空间 M, 一一对应 $M\longmapsto f(M)$ 是 $P(V)$ 到 $P(V')$ 上的同构.

(3) 齐次向量

设 a 是 V^{n+1} 中一向量, 则一维子空间 $[a]$ 是 $P(V^{n+1})$ 中一个点, 但是对于 $\forall x\in F$, $[xa]=[a]$, 所以对于 $P(V^{n+1})$ 的一个点 $A=[a]$ 来说, 向量 a 的选择不是唯一的, 它可以差一个数因子 $x\in F$. 因此我们把 $P(V^{n+1})$ 中一个点 $A=[a]$ 中的代表向量称为齐次向量.

引理 1 给出 $P(V)$ 中三个共线点 $P=[p]$, $Q=[q]$ 和 $R=[r]$, 则总存在两数 $x, y\in F$ 使得

$$P=xq+yr$$

证明 把 P 分解在直线 $[q]$ 和 $[r]$ 上,

$$P=P_q+P_r$$

于是 $P_q=xq, P_r=yr$.

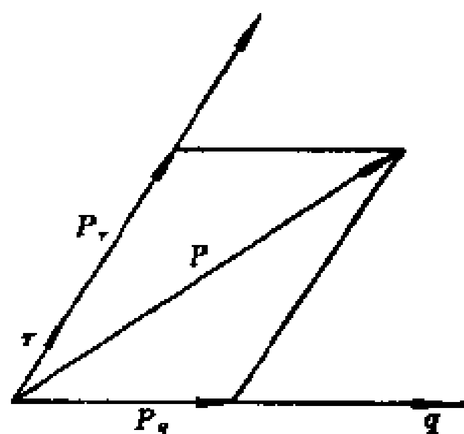


图 2-1

推论 设三点 $P=[p], Q=[q], R=[r]$ 共线, 则存在三数 $l, m, n\in F$ 使得

$$lp+mq+nr=0$$

下面我们利用齐次向量概念来证明射影几何中两个著名

定理.

定理 2(Desargues 定理) 设三点形 ABC 和 $A'B'C'$ 的三对应边两两相交即存在

$$L=BC\cap B'C',\quad M=CA\cap C'A',\quad N=AB\cap A'B'$$

则这两三角形对应顶点的连线 AA', BB' 和 CC' 共点的充要条件是 L, M, N 三点共线.

证明 必要性: 设 AA', BB', CC' 交于一点 P, 根据引理 1, 我们可以选择齐次向量使得 $A=[a]$, $A'=[a']$, $B=[b]$, $B'=[b']$, $C=[c]$, $C'=[c']$, $P=[p]$ 并且 $a'=p+a$, $b'=p+b$, $c'=p+c$, 所以

$$P=a'-a=b'-b=c'-c$$

令 $l=b-c=b'-c'$, $m=c-a=c'-a'$, $n=a-b=a'-b'$, $l=b-c$, 意味着是$[l]$与 $B=[b]$, $C=[c]$共线, $l=b'-c'$, 意味着$[l]$又与 $B=[b']$, $C'=[c']$共线, 所以$[l]=BC\cap B'C'=L$.

同理, $[m]=CA\cap C'A'=M$, $[n]=AB\cap A'B'=N$. 易知 $l+m+n=0$, 所以 L、M、N 三点共线.

充分性: 设 L、M、N 三点共线, 选齐次向量使得

$$A=[a],\ B=[b],\ C=[c]$$

根据引理 1, 存在数 y_1, z_1, x_2, z_2, x_3, $y_3\in F$ 使得

$$l=y_1b+z_1c$$

$$m=x_2a+z_2c$$

$$n=x_3a+y_3b$$

由于 L、M、N 共线, 则

$$l+m+n=(x_2+x_3)a+(y_3+y_1)b+(z_1+z_2)c=0$$

但是 A、B、C 三点不共线, 所以齐次向量 a, b, c 线性无关, 因此

$$x_2+x_3=y_3+y_1=z_1+z_2=0$$

于是我们可以调整齐次向量 a, b, c 使得

$$l=b-c,\ m=c-a,\ n=a-b$$

同理

$$l=b'-c',\ m=c'-a',\ n=a'-b'$$

因此存在齐次向量

$$p=a-a'=b-b'=c-c'$$

则点 $P=[p]$ 就是对应边 AA', BB' 和 CC' 的公共点.

定理 3(Pappus 定理) 考虑域 F 上的射影几何. 设 A, B, C 和 A', B', C' 分别是两共面直线上的点, 令

$$L=B'C\cap BC',\ M=C'A\cap CA',\ N=A'B\cap AB'$$

则 L, M, N 三点共线.

证明 根据结合命题, 设共面直线 ABC 与 $A'B'C'$ 交于 P, 选齐次向量使得

$$A=[a],\ A'=[a'],\ B=[b],\ B'=[b'],\ C=[c]$$
$$C'=[c'],\ P=[p']$$

根据引理 1, 齐次向量可以选择使得

$$b=p+a,\ b'=p+a'$$

同时, 我们还可以找到数 $x, y\in F$ 使得

$$c=p+xa,\ c'=p+ya'$$

命 $n=p+a+a'$ 则

$$n=b+a'=b'+a$$

所以 $[n]$ 是直线 $A'B$ 与 AB' 的公共点, 即 N.

同理, 命 $m=p+xa+ya'$, 则 $[m]=M$, 因为

$$xyn-m=x(y-1)b+(x-1)c'$$
$$yxn-m=y(x-1)b'+(y-1)c$$

由于 F 是一域, $xy=yx$, 因此 $[l]$ 是 BC' 与 $B'C$ 的公共点, 即 L. 因为

$$l=xym-n$$

所以 L, M, N 共线.

附记：在体 F 上的射影几何里，Pappus 定理成立的充要条件是 F 是一个域，因此对于一般体 F 上的射影几何来说，Pappus 定理只能作为公理.

(4) 调和点列

定理 4 给出直线上两点 A, B 和另一点 G，任取两点 C, D 使得 G, C, D 共线，设

$$E=AD\cap BC,\quad F=AC\cap BD,\quad H=EF\cap AB$$

则不管 C, D 如何选择，点 H 是唯一确定的.

证明 选齐次向量使得

$$A=[a], B=[b], G=[g]$$

因为 A, B, G 共线，所以存在 $x, y\in F$ 使得

$$g=xa+yb$$

再选齐次向量，使得

$$C=[c], D=[d]$$

因为 C, D, G 共线，所以适当选择 d 后，存在数 $z\in F$ 使得

$$d=g+zc=xa+yb+zc$$

命
$$e=yb+zc=d-xa$$
$$f=xa+zc=d-yb$$

则
$$[e]=BC\cap AD=E, [f]=AC\cap BD=F$$

再命
$$h=e-f=-xa+yb$$

则
$$[h]=EF\cap AB=H$$

注意点 H 的齐次向量是 $h=-xa+yb$，它与 C, D 的选择无关，定理证毕.

定义 称定理 4 里 H 为点 G 对于 A、B 的调和分离点，$(ABGH)$ 称为调和点列.

2.2 射影变换与射影坐标

(1) 射影变换

设 V 和 V' 都是域 F 上的向量空间，考虑线性映射：

$$f: V \to V'$$

它把 V 的任一子空间 M 映射到 V' 的一子空间 $f(M)$，因此，f 给出射影几何 $P(V)$ 到 $P(V')$ 中的一个映射，记成 $P(f)$

定义 如果 $f: V \to V'$ 是同构，则映射 $P(f): P(V) \to P(V')$ 称为射影变换.

定理 5 两同构 $f, g, V \to V'$ 确定同一射影变换 $P(f) = P(g)$ 的充要条件是存在数 $z \in F$ 使得 $g = zf$.

证明 充分性 如果存在 $z \in F$ 使得 $g = zf$，则对于 V 的任一子空间 M 有

$$g(M) = zf(M) = f(M)$$

所以 $P(f) = P(g)$.

必要性：设 $P(f) = P(g)$，如果 $\dim V = 1$ 则 $V = [a]$，

$$g(xa) = xg(a)$$

注意 $\dim V' = 1$ 所以 $f(a)$ 和 $g(a)$ 只差一数因子，即存在 $za \in F$ 使得 $g(a) = zaf(a)$，于是

$$g(xa) = xg(a) = x \cdot zaf(a) = za \cdot xf(a) = zaf(xa)$$

所以 $zxa = za$，即 za 不随 a 而变，$za = z$，于是 $g = zf$.

如果 $\dim V \geqslant 2$，设 a、b 是 V 中任一对线性无关的向量，则 $f(a)$ 与 $f(b)$ 在 V' 中也线性无关. 注意

$$g(a+b) = z_{a+b} f(a+b), \quad g(a) = z_a f(a)$$

$$g(b) = z_b f(b)$$

因为

$$g(a+b) = g(a) + g(b), \quad f(a+b) = f(a) + f(b)$$

所以 $$z_{a+b}=z_a=z_b$$

也就是对于 V 中任一对向量 a, b, $z_a=z_b$, 这说明 z_a 不随 a 而变, $z_a=z$, 则 $g=zf$.

附记：同构 $f: V\to V'$ 的坐标表达式是

$$x_i'=\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}x_j, \qquad (i=1,\cdots,n+1)$$

其中 $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ 和 $(x_1', \cdots, x_{n+1}')$ 分别是原向量和其象向量的坐标.

根据上述定理，射影变换 $P(f)$: $P(V)\to P(V')$ 的坐标表达式是

$$zx_i'=\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}x_j \qquad (i=1,\cdots,n+1)$$

其中 $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ 和 $(x_1', \cdots, x_{n+1}')$ 分别是原象点和象点的齐次坐标.

(2) 直射变换

对于 V 的自同构 f: $V\to V$ 来说，$P(f)$: $P(V)\to P(V)$ 称为射影几何 $P(V)$ 的直射变换，如果直射变换保持 $P(V)$ 中一个超平面上每一点不变，则称为中心直射.

定理 6 非恒同变换的中心直射，除了不变超平面 H 中的点外，有一个且只有一个不动点 A(可能在 H 上)，它称为直射中心.

证明 设直射变换 $\pi=P(f)$，f 是自同构 $V\to V$, 它在 H 上的恒同映射，令 c 是 V 中不属于 H 的向量，则 $\forall v\in V$ 可以表示成 $xc+h$, 其中 $x\in F$, $h\in H$, 但是

$$f(xc+h)=xf(c)+f(h)=xf(c)+h$$

所以 $f(xc+h)-(xc+h)=x(f(c)-c)$

如果 $f(c)=c$, 则 f 在整个 V 上是恒同，与假设不符；如果 $f(c)\neq c$, 命 $a=f(c)-c$, 则点 $[xc+h]$ 与它的象 $[f(xc+h)]$ 的联线必通

过点$[a]$，所以$A=[a]$是直射π的中心.

如果A和B是两个中心，则对于不在直线AB上任一点P，$\pi P=P$，设C是AB上一点，l是过C的任一条直线，则l上每一点除了C以外都在直射变换π作用下保持不动，因此C也不动，于是π是恒同变换，与假设不符.

最后，如果A是π的中心，则每一条过A的直线在π作用下不变，所以A是π的不动点.

定理 7 射影几何$P(V)$的任何直射变换是有限个中心直射的乘积.

先证明下列引理：

引理 2 设M是V的一个子空间，向量p和q都不属于M，则存在一个中心直射，它使M上每一点都不动，并且使$[p]$变成$[q]$.

证明 如果$M+[p]=M+[q]$，取M的一组基$\{a_1, \cdots, a_r\}$，把这组基加上p扩充成V的一组基$\{a_1, \cdots, a_r, p, b_1, \cdots, b_s\}$，因为$M+[p]=M+[q]$，所以$\{a_1, \cdots, a_r, q, b_1 \cdots, b_s\}$也是$V$的一组基，于是存在唯一自同构$f$：$V\to V$使得

$$f(a_i)=a_i(i=1, \cdots, r),\quad f(b_j)=b_j(j=1, \cdots, s)$$
$$f(p)=q$$

则f使V中的子空间$[a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots, b_s]$保持不动，即$P(f)$使$P(V)$的超平面$[a_1, \cdots, a_r, b_1, \cdots, b_s]$保持不动，所以$P(f)$是中心直射，它把$[p]$变成$[q]$，$P(f)$就是所求的中心直射.

如果$M+[p]\neq M+[q]$，则把M的基$\{a_1, \cdots, a_r\}$加上p和q扩充成V的一组基$\{a_1, \cdots a_r, p, q, b_1, \cdots, b_{s-1}\}$，考虑自同构$f$：$V\to V$，使得

$$f(a_i)=a_i(i=1, \cdots, r),\ f(b_j)=b_j(j=1, \cdots, s-1)$$
$$f(p)=q,\ f(q)=p$$

它使V中的子空间$[a_1, \cdots, a_r, b+q, b_1, \cdots, b_{s-1}]$保持不变，因此$P(f)$是$P(V)$的中心直射，它把$[p]$变成了$[q]$.

定理的证明 设$P(f)$是给出的直射变换$P(V)\to P(V)$对应自同构$f: V\to V$. 再设M是f的不变子空间（M中每一一维子空间都保持不动），任取向量$p_1\in V$但不属于M，使$q_1=f(p_1)$，根据上述引理，存在中心直射$\pi_1=P(f_1)$使得它逐点保持M不动并且变$[p_1]$为$[q_1]$，因此直射变换$p(f_1^{-1}f)$保持$M\oplus[p_1]$不动，再设向量$p_2\in V$，但是$p_2\bar{\in} M\oplus[p_1]$，则又可找到中心直射$\pi_2=P(f_2)$使得$P(f_2^{-1}f^{-1}f)$保持$M\ominus[p_1]\oplus[p_2]$不动. 如此继续作下去，我们得到一系列中心直射$\pi_1=P(f_1)$，$\pi_2=P(f_2)$，$\cdots$，$\pi_k=P(f_k)$使得$P(f_k^{-1}\cdots f_2^{-1}f_1^{-1}f)$保持$M\oplus[p_1]\oplus[p_2]\oplus\cdots\oplus[p_k]=V$不动，所以

$$P(f_k^{-1}\cdots f_2^{-1}f_1^{-1}f)=\text{恒同映射}$$

因此

$$\pi=P(f)=P(f_1)\cdots P(f_k)=\pi_1\pi_2\cdots\pi_k$$

其中$\pi_i(i=1, \cdots, k)$都是中心直射.

(3) 射影坐标

设V^{n+1}是域F上的$(n+1)$维向量空间，选定了一组基$\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$以后，就确定了向量空间的同构

$$f: V^{n+1}\to F^{n+1}$$

这同构确定了射影变换

$$P(f): P(V^{n+1})\to P(F^{n+1})$$

我们把有序点组$\{[a_0], [a_1], \cdots, [a_n]\}$或$\{A_0, A_1, \cdots, A_n\}$称为射影几何$P(V^{n+1})$的射影坐标系的参考标架.

确定了参考标架以后，对于$P(V^{n+1})$中的任一点$[a]$，如果我们把齐次向量a表示成

$$a=x_0a_0+x_1a_1+\cdots+x_na_n$$

则$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$是F^{n+1}中一向量，它确定的一维子空间$[(x_0,$

$x_1, \cdots, x_n)$]是 $P(F^{n+1})$中一点，因此参考标架$\{A_0, A_1, \cdots, A_n\}$, $A_i = [a_i]$($i=0, \cdots, n$)，建立了 $P(V^{n+1})$的点$[a]$与 $P(F^{n+1})$中的点$[(x_0, x_1, \cdots, x_n)]$之间的一一对应，我们把$(n+1)$有序数组$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$称为点$[a]$的齐次射影坐标．因为$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$是一齐次向量，因此它们可以差一比例因子．

给出 n 维射影几何 $P(V^{n+1})$的参考坐标架$\{A_0, A_1, \cdots, A_n\}$, $A_i=[a_i]$($i=0, \cdots, n$)，如果再给另外一点 U，并规定 $U=[a_0+a_1+\cdots+a_n]$，则点组$\{A_0, A_1, \cdots, A_n, U\}$称为 $P(V^{n+1})$的标准参考标架．

实例 对于 $P(F^{n+1})$来说，标准参考标架是

$$\{E_0, E_1, \cdots, E_n, E\}$$

其中 $E_i=[e_i]$($i=0, \cdots, n$), $E=[(1, \cdots, 1)]$

$$e_i=(0, \cdots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \cdots, 0)$$

定理 8 设 V 和 V' 都是域 F 上的$(n+1)$维向量空间，$(A_0, A_1, \cdots, A_n, U)$和$(A'_0, A'_1, \cdots, A'_n, U')$分别是 n 维射影几何 $P(V)$和 $P(V')$的标准参考标架，则存在唯一射影变换 $P(f)$使得

$$P(f)A_i=A'_i\ (i=0, \cdots, n), P(f)U=U'$$

证明 命 $A_i=[a_i]$, $A'_i=[a'_i]$($i=0, \cdots, n$)，$\{a_0, \cdots, a_n\}$和$\{a'_0, \cdots, a'_n\}$分别是 V 和 V' 的基，存在唯一线性映射 f: $V\to V'$ 使得 $f(a_i)=a'_i$ ($i=0, \cdots, n$)，同时有

$$f(a_0+\cdots+a_n)=a'_1+\cdots+a'_n$$

f 确定了射影变换 $P(f)$: $P(V)\to P(V')$它使

$$P(f)(A_i)=A'_i, P(f)(U)=U'$$

这就是所求的射影变换．

再证明：$P(f)$是唯一的．设有两同构 $f, g, V\to V'$ 使得$f(a_i)=a'_i$, $g(a_i)=x_i a'_i$，则因为 $P(f)U=U'$，所以

$$[f(a_0+\cdots+a_n)]=[g(a_0+\cdots+a_n)]$$

则有

$$z(a_0'+\cdots+a_n')=x_0a_0'+\cdots+x_na_n'$$

即 $x_0=\cdots=x_n=z$, 所以

$$g\cdot(a_i)=zf(a_i)(i=0,\cdots,n)$$

或 $g=zf$, 根据定理 5, $P(f)=P(g)$。

2.3 对偶原理

(1) 对偶空间

设 V 是域 F 上的向量空间, 命 $V^*=L(V,F)$, 容易证明它也是 F 上的向量空间, 称为 V 的对偶空间, 它的元素是 V 上的线性函数 $f: V\to F$.

给出 V 的一组基 $\{a_1,\cdots,a_n\}$, 则存在 V^* 的一组对偶基 $\{a_1^*,\cdots,a_n^*\}$, 使得

$$a_i^*(a_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

因此 $\dim V^*=\dim V$.

引理 3 存在 V 和 V^{**} 之间的同构.

证明 定义映射 $V\to V^{**}$ 如下:
任给 $e\in V$, 则存在唯一 $e^{**}\in V^{**}$ 使得

$$e^{**}(f)=f(e),\quad \forall f\in V^*$$

容易证明这映射是线性的. 此外, 由于

$$\dim V^{**}=\dim V^*=\dim V$$

所以这一线性映射是同构.

根据引理 3, 通常我们把 V 与 V^{**} 等同起来.

定义 设 M 是 V 的子空间, 并命 M^0 是 V^* 的子集

$$M^0=\{f\in V^*:\ f(M)=0\}$$

则 M^0 称为 M 的零化空间, 映射 $M\to M^0$ 称为零化映射. 容易看

出 M^0 是 V^* 的子空间.

定理 9 零化映射 $M\to M^0$ 是 V 的子空间到 V^* 的子空间上的一一映射, 并且有下列性质:

(i) $\dim M^0=\dim V-\dim M$

(ii) $M^{00}=M$

(iii) $M\subset N\Longrightarrow M^0\supset N^0$

(iv) $(M+N)^0=M^0\cap N^0$

(v) $(M\cap N)^0=M^0+N^0$

证明 (i) 命 $\{a_1, \cdots, a_r\}$ 是 M 的一组基, 把它扩充成 V 的一组基 $\{a_1, \cdots, a_r, \cdots, a_n\}$, 再命 $\{a', \cdots, a^r, \cdots, a^n\}$ 是 V^* 中的对偶基, $f\in M^0$ 当且仅当 $f(a_1)=\cdots=f(a_r)=0$, 如果 $f=x_1a'+\cdots+x_na^n$, 则 $x_1=\cdots=x_r=0$, 因此

$$M^0=[a^{r+1}, \cdots, a^n]$$

所以 $\dim M^0=n-r=\dim V-\dim M$

(ii) $\dim M^{00}=\dim V^*-\dim M^0=\dim M$

两向量空间的维数相同是同构的, 所以 $M=M^{00}$.

如果 $M^0=N^0$, 则 $M^{00}=N^{00}$, 但是 $M^{00}=M, N^{00}=N$, 所以 $M=N$, 这说明零化映射 $M\to M^0$ 是一一对应的.

(iii) 设 $f\in N^0$, 则 $f(N)=0$, 因为 $M\subset N$, 所以 $f(M)=0$, 这说明 $f\in M^0$, 因此 $N^0\subset M^0$.

(iv) 如果 $f\in(M+N)^0$, 则 $f(M+N)=0$, 当然有 $f(M)=0$ 和 $f(N)=0$, 因此 $f\in M^0$ 和 $f\in N^0$, 即 $f\in M^0\cap N^0$.

(v) $(M^0+N^0)=M^{00}\cap N^{00}=M\cap N$

所以 $(M\cap N)^0=(M^0+N^0)^{00}=M^0+N^0$

(2) 对偶原理

定义 零化映射 $M\to M^0$ 给出 $P(V)\to P(V^*)$ 的一一映射, 称为对偶映射.

实例 设$V=F^4$是4维数空间，则V^*也是4维向量空间. V中的向量是有序数组$a=(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $a_i\in F$, V^*中的元素是V的线性函数f: $V\to F$, 设$f(e_i)=x_i (i=1, 2, 3, 4)$, 则

$$f(a)=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4$$

三维射影几何$P(V)$中的点$A=[a]$是$a=(a_1, a_2, a_3, a_4)$所张的V中的一维子空间，经过对偶映射它对应三维射影几何$P(V^*)$中的"面"，这是V^*中的三维子空间

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$$

$P(V)$中的"线"，设它是V中两线性无关的向量，$a=(a_1, a_2, a_3, a_4)$和$b=(b_1, b_2, b_3, b_4)$所张的二维子空间$[a, b]$，经过对偶映射，它对应$P(V^*)$中的"线"，它是$P(V^*)$中的两个"面"

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$$

和
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0$$

的交线；$P(V)$中的"面"，设它是V中三个线性无关向量

$$a=(a_1, a_2, a_3, a_4)$$
$$b=(b_1, b_2, b_3, b_4)$$
$$c=(c_1, c_2, c_3, c_4)$$

所张的三维子空间$[a, b, c]$，经过对偶映射，它对应$P(V^*)$中的"点"，它是$P(V^*)$中三个"面"

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0$$

和
$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=0$$

的交点.

定义 给出射影几何$P(V)$的一个几何命题(P)，如果把(P)中$P(V)$的几何元素，即V的各种子空间，经过对偶映射变成$P(V^*)$中的几何元素，即V^*中的对应子空间，把(P)中$P(V)$的结合关系$\subset$, $+$, $\cap$换成$P(V^*)$中的结合关系$\supset$, $\cap$, $+$，则得到$P(V^*)$

中的一个几何命题(P^*)，这个命题称为命题(P)的对偶命题.

从定理 9 立即推出

定理 10(对偶原理)　射影几何中一个命题(P)如果成立，则经过对偶映射后，射影几何 $P(V^*)$ 中的对偶命题 (P^*) 也一定成立。

§3　一般体(域)上的仿射几何

3.1　仿射空间与仿射几何

设 V 是体 F 上的 $(n+1)$ 维向量空间，命 M 是 V 中一固定的 n 维子空间，则 $V-M$ 称为 n 维仿射空间.

V 中所有不属于 M 的子空间的集合称为 n 维仿射几何，记成 $A(V)$. 不属于 M 的一维子空间称为 $A(V)$的"点"，二维子空间称为"线"，……，$(k+1)$维子空间称为"k 维平面"，n 维子空间称为"超平面".

显然，n 维仿射几何 $A(V)$是 n 维射影几何 $P(V)$的子集. 如果把 $A(V)$添加上 M 以及 M 的所有子空间，就得到 $P(V)$. 我们把 M 称为 $A(V)$的"无穷远超平面". 在 n 维射影几何 $P(V)$中规定一个超平面 M 是无穷远面以后，就变成 n 维仿射几何 $A(V)$.

现在我们在 n 维仿射几何 $A(V)$中定义"平行"关系. 如果 $A(V)$中两元素 S 和 T，满足 $S\cap T\subseteq M$，则我们说元素 S 和 T 是平行的，记成 $S /\!/ T$.

从射影几何 $P(V)$的结合关系可以自然地诱导出仿射几何 $A(V)$的结合关系. 例如:

当 $\dim V=2$, $A(V)$中有下列结合关系:

(i) 连结两点有一条直线.

(ii) 两不平行的直线相交于一点.

当 $\dim V=3$, 则 $A(V)$ 有下列结合关系:

(i) 连结两点有一条直线,

(ii) 两不平行的平面交于一直线,

(iii) 过两条相交直线有一平面,

(iv) 共面的两条不平行的直线交于一点,

(v) 过两条平行直线有一平面,

(vi) 过一条直线和不在直线上的点有一平面,

(vii) 一平面和与它不平行的直线交于一点.

此外, 我们还有仿射几何中的 Desargues 定理和 Pappus 定理.

命题 1 (仿射 Desargues 定理) 如果两三角形的三对对应顶点的联线交于一点或平行, 则对应边相交或平行, 三对对应边都相交时交点在一直线上.

命题 2 (仿射 Pappus 定理) 设点 A, B, C 和 A', B', C' 分别在两条共面的直线上(可能平行), 设 $L=BC'\cap B'C$, $M=CA'\cap C'A$, $N=AB'\cap A'B$, 则 L, M, N 三点共线.

3.2 仿射坐标

设 V 是域 F 上的 $(n+1)$ 维向量空间, 对于射影几何 $P(V)$ 来说, 我们选定一标准参考标架 $\{A_0, A_1, \cdots, A_n, U\}$, 使得 $A_0\notin M$, $A_1, \cdots, A_n\in M$, 则这个标架称为仿射几何 $A(V)$ 的仿射参考标架.

在 V 中取一组基 $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ 使得 $a_1, \cdots, a_n\in M$, 并且

$[a_0]=A_0, [a_1]=A_1, \cdots, [a_n]=A_n, [a_0+a_1+\cdots+a_n]=U$

则对于 $P(V)$ 中任一点 $P=[p]$, 设

$$p=x_0a_0+x_1a_1+\cdots+x_na_n$$

则 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 称为点 P 对于标准参考标架 $\{A_0, A_1, \cdots, A_n, U\}$ 的齐次坐标. 注意齐次坐标可以差一比例因子, 即 $(\rho x_0, \rho x_1, \cdots,$

$\rho x_n) = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

如果点 $P \in M$, 则 P 是仿射几何 $A(V)$ 中的点, 由于 $P \notin M$, 所以 $x_0 \neq 0$, 因此我们可以定义

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad \cdots, \quad \bar{x}_n = \frac{x_n}{x_0}$$

$(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$称为 n 维仿射几何 $A(V)$ 中点 P 对于仿射参考标架$\{A_0, A_1, \cdots, A_n, U\}$的仿射坐标. 注意齐次坐标$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$可以差一比例因子, 但是仿射坐标$(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$都是唯一确定的.

3.3 仿射变换

V 的自同构 f: $V \to V$ 的坐标表达式是

$$x_i' = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

其中$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$和$(x_0', x_1', \cdots, x_n')$分别是 f 的原象向量与象向量对于 V 的某一组基$\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$的坐标, 并且 $\det|a_{ij}| \neq 0$.

根据定理 5, 自同构 f: $V \to V$ 诱导的直射变换 $P(f)$: $P(V) \to P(V)$, 它的坐标表达式是

$$(*) \qquad \rho x_i' = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

其中$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$和$(x_0', x_1', \cdots, x_n')$分别是 $P(f)$的原象点和象点对于$P(V)$ 的标准参考标架 $\{A_0, A_1, \cdots, A_n, U\}$ 的齐次坐标, 并且 $\det|a_{ij}| \neq 0$.

$P(V)$的一个直射变换. 如果保持无穷远超平面 M 不变, 则称为 $A(V)$的仿射变换.

取 V 的一组基$\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$, 使得 $a_0 \notin M$, $a_1, \cdots, a_n \in M$, 则超平面 M 的方程是 $x_0 = 0$(即 M 点的向量的第一个坐标 x_0 为 0). 考虑由直射变换 f: $V \to V$ 所诱导的仿射变换 $A(f)$: $A(V) \to A(V)$.

由于 $A(f)$ 保持 M 不动，所以 $A(f)$ 的坐标表达式(*)应是

$$\rho x_0' = a_{00} x_0 \qquad (a_{00} \neq 0)$$

$$\rho x_i' = a_{i0} x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

其中 $\det|a_{ij}| \neq 0$。

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i'}{x_0'} = \frac{a_{i0}}{a_{00}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{00}} \frac{x_j}{x_0}, \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

于是得到仿射变换 $A(f)$ 的坐标表达式：

$$(**) \quad \tilde{x}_i' = b_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \tilde{x}_j \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

其中

$$b_i = \frac{a_{i0}}{a_{00}}, \quad b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{00}}, \quad \det|b_{ij}| = \frac{1}{(a_{00})^n} \det|a_{ij}| \neq 0$$

显然仿射变换 $A(f)$ 是有逆变换的.

命题 3 如果一个仿射变换 $A(V) \to A(V)$ 使线性无关的点组 $\{A_0, A_1, \cdots, A_n\}$ 分别对应线性无关的点组 $\{A_0', A_1', \cdots, A_n'\}$，则这个仿射变换是唯一确定的.

证明 先设点 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 的仿射坐标分别为

$$(0, 0, \cdots, 0)$$
$$(1, 0, \cdots, 0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(0, \cdots, 0, 1)$$

则点 $A_0', A_1', \cdots, A_n'$ 的仿射坐标就是(**)式中的系数

$$(b_1, \cdots, b_n)$$
$$(b_{11}, \cdots, b_{n1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(b_{1n}, \cdots, b_{nn})$$

因此给定的仿射变换的坐标表达式(**)由象点$\{A_0', A_1', \cdots, A_n'\}$的仿射坐标唯一确定. 我们把这个仿射变换记成 T.

如果 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 的仿射坐标不是$(0, 0, \cdots, 0)$, $(1, 0, \cdots, 0)$和$(0, \cdots, 0, 1)$. 则根据以上分析存在唯一仿射变换S把点$(0, \cdots, 0)$, $(1, 0, \cdots, 0)$和$(0, \cdots, 0, 1)$分别变成$A_0, A_1, \cdots, A_n$. 注意S是有逆变换的, 因此给定的仿射变换就是$T\cdot S^{-1}$, 其中S^{-1}把点组$\{A_0, A_1, \cdots, A_n\}$变成$(0, \cdots, 0)$, $(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, \cdots, 0, 1)$, T再把后者变成$\{A_0', A_1', \cdots, A_n'\}$.